LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques

EXERCICES MP

Énoncés

Solutions

Commentaires

D. GUININ

Tout le nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Titres disponibles dans la filière MP

Mathématiques 2e année

- Analyse MP
- Algèbre et géométrie MP

Physique 2e année

- Optique MP-PC-PSI-PT
- Mécanique MP-PC
- Électromagnétisme MP
- Électronique MP
- Thermodynamique MP

Chimie 2e année

- Chimie MP-PT

Exercices 2e année

- Mathématiques MP
- Physique MP

Maquette et couverture : *Sophie Martinet.*
Réalisation : 16 iS.

ISBN 2 7495 0391 4

Avant-propos

Dans la perspective de passer le cap de l'écrit et de faire une bonne prestation orale, cet ouvrage vous propose 183 sujets d'oraux et 25 problèmes.

Il a pour ambition de vous aider à «rentrer» dans un sujet, de le «lire», sans se limiter à une solution idéale ou académique.

- ## Sujets d'oraux

  Ils sont tous tirés d'annales récentes de concours.

  Le plus délicat est souvent la phase de démarrage : *par quel bout le prendre ?* C'est pourquoi les solutions proposées sont accompagnées et entrecoupées de commentaires dont le but est de :

  > Réfléchir à haute voix, comme c'est indispensable lors de toute épreuve orale, qu'il s'agisse des colles en cours d'année ou, à plus forte raison, d'un oral «pour de vrai».

  Les énoncés de «planches» sont relativement brefs et il est de l'initiative du candidat d'en tirer le maximum. L'objet des commentaires est aussi de donner des idées dans ce sens.

  Certaines solutions peuvent être éclairées par une figure qui n'est pas nécessairement proposée. Confronté à cette situation, vous devez avoir le réflexe de faire «votre» figure. Et votre virtuosité dans l'utilisation d'une calculatrice fera le reste !

  Souvent, plusieurs pistes s'offrent à vous et plusieurs solutions sont satisfaisantes. C'est pourquoi certains sujets proposent plusieurs démarches.

  La connaissance du cours est supposée acquise et les exercices de «rodage basique» sont travaillés en classe. C'est le minimum vital pour utiliser cet ouvrage avec profit.

- ## Thèmes d'étude et problèmes

  Les 25 thèmes d'étude et problèmes recouvrent tout le programme de MP.

  Contrairement aux sujets d'oraux, ils sont découpés en questions et alinéas à travers lesquels la logique du sujet est transparente. Pour cette raison, il n'est proposé qu'une seule solution, sans beaucoup de commentaires.

Ce double aspect vous permet de disposer d'un outil de travail personnel, complet et adapté à la dure réalité des concours.

Ce livre d'exercices, qui complète les *Précis d'analyse* et *Précis d'algèbre et géométrie, MP*, Éditions Bréal, constitue pour vous une bonne base de révision des notions indispensables aux concours.

Les auteurs

Sommaire

Sommaire

CHAPITRE 1

Arithmétique
Algèbre générale

Sujets d'oraux 8

Thèmes d'étude – Problèmes 41

Sujets d'oraux

(A) Dénombrement

Ex. 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments sur un ensemble à n éléments.

Soit A de cardinal $n+1$: $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, B de cardinal n : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, et S l'ensemble des surjections de A sur B.

Pour $f \in S$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $(j, k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $j \neq k$, uniques tels que $f(a_j) = f(a_k) = b_i$ et alors $f_{|A \setminus \{a_j, a_k\}}$ est une bijection de $A \setminus \{a_j, a_k\}$ sur $B \setminus \{b_i\}$.

L'application Φ définie sur S par :

$$\Phi : f \mapsto b_i, \{a_j, a_k\}, f_{|A \setminus \{a_j, a_k\}}$$

est injective, donc :

$$\operatorname{Card} S = \operatorname{Card} \Phi(S) = n \times \mathrm{C}_{n+1}^{2} \times (n-1)!.$$

En conclusion, $\operatorname{Card} S = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

(B) Numération

Ex. 2

Montrer qu'il existe un entier N multiple de 1996 dont l'écriture en base 10 ne contient que le chiffre 4.

> Il faut commencer par analyser le problème en introduisant le nombre de chiffres de l'écriture de N.

Remarquons d'abord que $1996 = 4 \times 499$ avec 499 premier, et si l'écriture de N comporte n chiffres, $N = 4(1 + 10 + \dots + 10^{n-1})$ c'est-à-dire :

$$N = 4\frac{10^n - 1}{9}.$$

Le problème se lit donc : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = 4 \times 499 \times q$$

soit aussi :

$$10^n - 1 = 9 \times 499 \times q.$$

> C'est le moment de penser au petit théorème de Fermat : si p est un entier premier, pour tout entier $x \not\equiv 0 \bmod p$, on a $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

499 est premier et $10 \not\equiv 0 \bmod 499$, donc $10^{498} \equiv 1 \bmod 499$.

D'autre part, $10 \equiv 1 \bmod 9$ donne, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $10^n \equiv 1 \bmod 9$.

Ainsi 9 et 499 divisent $10^{498} - 1$ et, puisqu'ils sont premiers entre eux, leur produit 9×499 divise $10^{498} - 1$. En conclusion, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^{498} - 1 = 9 \times 499 \times q$ et le nombre :

$$N = 4\,\frac{10^{498} - 1}{9}$$

est solution du problème avec 498 chiffres 4.

Ex. 3

Soit $N = 1\,0\,1\,0\,1\,0 \ldots 1\,0\,1$ écrit en base 10.
L'entier N est-il premier ?

Le nombre N s'écrit avec p fois le chiffre 1 et $p - 1$ fois le chiffre 0 et on a :

$$N = 1 + 10^2 + \cdots + 10^{2(p-1)} = \frac{10^{2p} - 1}{10^2 - 1}\,.$$

> Une exploration numérique avec un logiciel de calcul formel montre que si 101 est premier, il n'en est pas de même pour $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ ou pour $1010101 = 73 \times 101 \times 137$. En fait, nous allons prouver que N est non premier dès que $p \geqslant 3$. Ceci nécessite de faire apparaître une factorisation après la simplification par $10^2 - 1$ et, pour ce faire, nous allons procéder différemment selon que p est pair ou impair.

- Premier cas : p est pair, $p = 2n$ avec $n \geqslant 2$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{10^2 - 1} \times \left(10^{2n} + 1\right) = \left(1 + 10^2 + \cdots + 10^{2(n-1)}\right)\left(10^{2n} + 1\right).$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $1 + 10^2 + \cdots + 10^{2(n-1)} > 1$, donc N n'est pas premier.

- Deuxième cas : p est impair, $p = 2n + 1$ avec $n \geqslant 1$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n+1} - 1}{10 - 1} \times \frac{10^{2n+1} + 1}{10 + 1}$$

donc, en utilisant $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k} b^k$, il vient :

$$\begin{aligned} N &= \left(1 + 10 + \cdots + 10^{2n}\right)\left(1 - 10 + 10^2 + \cdots + (-1)^k 10^k + \cdots + 10^{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} 10^k \times \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k \end{aligned}$$

ce qui prouve que N n'est pas premier.

Ex. 4

Soit $abcdef$ l'écriture en base 10 d'un entier naturel divisible par 13. Montrer que l'entier naturel dont l'écriture en base 10 est $bcdefa$ est encore divisible par 13.

Dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ les éléments étant notés $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}$, l'hypothèse se lit :

$$\overline{10}^5 a + \overline{10}^4 b + \overline{10}^3 c + \overline{10}^2 d + \overline{10} e + \overline{1} f = \overline{0} \qquad (1)$$

et il nous faut vérifier que :

$$\overline{10}^5 b + \overline{10}^4 c + \overline{10}^3 d + \overline{10}^2 e + \overline{10} f + \overline{1} a = \overline{0}. \qquad (2)$$

En multipliant les deux membres de (1) par $\overline{10}$, on obtient :

$$\overline{10}^5 b + \overline{10}^4 c + \overline{10}^3 d + \overline{10}^2 e + \overline{10} f + \overline{10}^6 a = \overline{0}. \qquad (3)$$

Or, avec $\overline{10} = -\overline{3}$, il vient successivement :

$$\overline{10}^2 = -\overline{30} = -\overline{4}, \quad \overline{10}^3 = -\overline{40} = -\overline{1} \quad \text{et} \quad \overline{10}^6 = (-\overline{1})^2 = \overline{1}.$$

En conséquence, (3) est identique à (2), ce qui montre que $bcdefa$ est divisible par 13.

Ⓒ Identités algébriques Applications à l'arithmétique

Ex. 5

Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ soit le carré d'un entier ?

Posons $A(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$.

Il est clair que $n = 0$ convient : $A(0) = 1^2$.

On se propose de démontrer que c'est la seule solution.

Supposons maintenant $n \geqslant 1$ donc $A(n) \geqslant 7$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A(n) = p^2$, on a $p^2 \geqslant 7$ donc $p \geqslant 3$ et d'autre part :

$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1 = n^2(n+1)^2 + 2n^2 + 1 \quad \text{avec} \quad n \geqslant 1$$

donne $\quad p^2 < n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1$

c'est-à-dire $\quad p^2 < \left(n(n+1)+1\right)^2$

soit aussi $\quad p < n^2 + n + 1$

ou encore $\quad n^2 + n + 1 - p \geqslant 1.$

Écrivons alors $A(n) = n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1 - 2n$

$$= (n^2 + n + 1)^2 - 2n.$$

L'égalité $A(n) = p^2$ donne :

$$2n = \left(n^2 + n + 1\right)^2 - p^2$$
$$= \left(n^2 + n + 1 - p\right)\left(n^2 + n + 1 + p\right)$$

et, avec $n^2 + n + 1 - p \geqslant 1$, il vient $2n \geqslant n^2 + n + 1 + p$, c'est-à-dire :

$$n^2 - n + 1 + p \leqslant 0$$

ce qui est évidemment absurde.

Ex. 6

Soit $a_n = 2^n + 1$. On suppose que a_n est premier, que peut-on dire de n ?

> Une exploration numérique montre que pour $n \leqslant 20$, a_n est premier lorsque $n = 1, 2, 4, 8, 16$ c'est-à-dire lorsque n est de la forme $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^k$. On peut donc supposer qu'une condition nécessaire pour que a_n soit premier est que n soit de la forme 2^p.

Supposons que $n \notin \{2^k / k \in \mathbb{N}\}$. Alors en considérant la décomposition de n en facteurs premiers, il existe j impair, $j \geq 3$, et $k \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^k j$ donc aussi $n = 2^k(2i+1)$, $i \geq 1$. On en déduit $a_n = b^{2i+1} + 1$ où on a posé $b = 2^{2^k}$. L'identité :

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2n-k} y^k$$

donne maintenant :

$$a_n = (b+1)\sum_{k=0}^{2i}(-1)^k b^{2i-k}$$

ce qui prouve que a_n est non premier.

En prenant la contraposée de cette implication, on en déduit que si a_n est premier, alors n est de la forme 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

On note que cette condition n'est pas suffisante puisque $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700\,417$ (factorisation fournie par Maple).

> *Remarque.* Les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont appelés les nombres de Fermat. Les cinq premiers : 3 $(n = 1)$, 5 $(n = 2)$, 17 $(n = 2^2)$, 257 $(n = 2^3)$ et $65\,537$ $(n = 2^4)$ sont premiers mais au-delà, c'est-à-dire pour $n \geq 5$, on n'a, à ce jour, découvert aucun nombre premier.

Ex. 7

Trouver tous les couples (m, n) d'entiers naturels tels que :

$$3^m - 2^n = 1 \qquad (E)$$

> Après avoir écarté les cas particuliers liés aux solutions apparentes de cette équation, une démarche usuelle consiste en la recherche de conditions nécessaires. Pour ce faire, on pourra observer que, lorsque m et n sont pairs, $3^m - 2^n$ est factorisable au moyen de l'identité :
>
> $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Notons d'abord que, la suite $(3^m)_{m \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante, pour $n \in \mathbb{N}$ donné il existe au plus une valeur de m telle que (m, n) soit solution de (E).

Il est apparent que l'unique solution correspondant à $n = 1$ est le couple $(1, 1)$ $(3^1 - 2^1 = 1)$ et que celle correspondant à $n = 3$ est le couple $(2, 3)$ $(3^2 - 2^3 = 1)$. De même, il est facile de vérifier qu'il n'y a pas de solution correspondant à $n = 0$ ou $n = 2$. En conséquence, nous pouvons, dans la suite, nous limiter à $n \geq 4$.

- Recherche de conditions nécessaires

On suppose que (m, n) est solution de (E) avec $n \geq 4$.

En remarquant que $m \geq n$ donne :

$$3^m - 2^n \geq 3^n - 2^n = (3-2)\sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-1-k} 2^k$$

et donc $3^m - 2^n \geq n \geq 4$, on voit qu'une première condition nécessaire est $m < n$. (1)

L'égalité $3^m - 2^n = 1$ nous donne $3^m \equiv 1 \bmod 2^n$ soit aussi $\overline{3}^m = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}_{/2^n\mathbb{Z}}$ et on en déduit que m est un mutiple de p, ordre de $\overline{3}$ dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}_{/2^n\mathbb{Z}}$.

Or on a $3 \equiv 1 \bmod 2$, $3^2 \equiv 1 \bmod 2^3$ et, en supposant $3^{2k} \equiv 1 \bmod 2^{k+2}$ c'est-à-dire $3^{2^k} = 2^{k+2}\ell + 1$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$3^{2^{k+1}} = \left(2^{k+2}\ell + 1\right)^2 = 2^{k+3}\left(2^{k+1}\ell^2 + \ell\right) + 1$$

donc $3^{2^{k+1}} \equiv 1 \bmod 2^{k+3}$, ce qui montre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 3^{2^k} \equiv 1 \bmod 2^{k+2}.$$

On en déduit $\overline{3}^{2^{n-2}} = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}_{/2^n\mathbb{Z}}$ et l'ordre p de $\overline{3}$ est un diviseur de 2^{n-2} donc de la forme 2^α avec $0 \leqslant \alpha \leqslant n-2$. Sachant de plus que $\overline{3} \neq \overline{1}$ dès que $n \geqslant 2$, on a $p > 1$ c'est-à-dire $p = 2^\alpha$ avec $1 \leqslant \alpha \leqslant n-2$. Ainsi p est pair et m multiple de p est également pair :

$$m = 2a, \quad a \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Remarquons maintenant que si n était pair : $n = 2b$, $b \geqslant 2$, on aurait :

$$3^m - 2^n = 3^{2a} - 2^{2b} = \left(3^a - 2^b\right)\left(3^a + 2^b\right)$$

donc $3^a + 2^b$ serait diviseur de 1, ce qui est impossible avec $3^a + 2^b \geqslant 5$. En conséquence, n est impair :

$$n = 2b + 1, \quad b \geqslant 2 \tag{3}$$

- Conditions suffisantes

> On recherche maintenant quels sont, parmi les couples (m, n) vérifiant les conditions (1), (2) et (3), ceux qui satisfont à $3^m - 2^n = 1$.

Les couples vérifiant (1), (2) et (3) sont de la forme $\left(2a, 2b+1\right)$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $b \geqslant 2$, $a \leqslant b$ et un tel couple est solution de (E) si et seulement si $3^{2a} - 1 = 2^{2b+1}$, c'est-à-dire :

$$\left(3^a - 1\right)\left(3^a + 1\right) = 2^{2b+1}.$$

Cette condition impose $a \neq 0$, donc $1 \leqslant a \leqslant b$, et elle donne l'existence de $c \in [\![1, 2b]\!]$ tel que :

$$3^a - 1 = 2^c \text{ et } 3^a + 1 = 2^{2b+1-c} \text{ soit aussi } 3^a = 2^{c-1} + 2^{2b-c} \text{ et } 1 = 2^{2b-c} - 2^{c-1}.$$

Il est facile de voir que l'équation $1 = 2^{2b-c} - 2^{c-1}$, $1 \leqslant c \leqslant 2b$, $b \geqslant 2$, n'a pas de solution. En effet, $c = 2b$ est à rejeter puisque l'on obtiendrait alors $0 = 2^{c-1}$ ce qui est irréalisable et, pour $c < 2b$, $1 + 2^{c-1} = 2^{2b-c}$ est un entier pair donc 2^{c-1} est impair ce qui exige $c = 1$, $1 + 2^{c-1} = 2$, $2b - 1 = 1$ donc $b = 1$, ce qui est exclu.

En conclusion, il n'existe aucun couple (m, n) solution de (E) avec $n \geqslant 4$ et, compte tenu de l'étude préliminaire, les seules solutions de (E) sont les deux couples $(1, 1)$ et $(2, 3)$.

Ex. 8

Soit p un entier premier tel que $p \geqslant 3$ et $r \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$(1+p)^{p^r} \equiv 1 + p^{r+1} \bmod \left[p^{r+2}\right].$$

> En remarquant que $(1+p)^{p^{r+1}} = \left((1+p)^{p^r}\right)^p$ une solution par récurrence sur r semble s'imposer.

Pour $r = 0$, on a $(1+p)^r = 1 + p = 1 + p^{r+1}$ d'où a fortiori :

$$(1+p)^{p^r} \equiv 1 + p^{r+1} \bmod \left[p^2\right].$$

Pour $r = 1$, on a :

$$(1+p)^{p^r} = (1+p)^p = 1 + p^2 + \frac{p(p-1)}{2}p^2 + \sum_{k=3}^{p} \mathrm{C}_p^k p^k$$
$$= 1 + p^2 + p^3\left[\frac{p-1}{2} + \sum_{k=0}^{p-3} \mathrm{C}_p^{k+3} p^k\right].$$

Puisque p est premier, avec $p \geqslant 3$, p est impair et $\frac{p-1}{2}$ est un entier, donc l'expression précédente montre que :

$$(1+p)^p \equiv 1 + p^2 \bmod \left[p^3\right].$$

Supposons la propriété vraie pour $r \geqslant 1$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1+p)^{p^r} = 1 + p^{r+1} + kp^{r+2} = 1 + p^{r+1}(1+kp)$$

On obtient alors :

$$(1+p)^{p^{r+1}} = \left[1 + p^{r+1}(1+kp)\right]^p$$
$$= 1 + pp^{r+1}(1+kp) + \sum_{j=2}^{p} \mathrm{C}_p^j p^{j(r+1)}(1+kp)^{p-j}$$

Avec $r \geqslant 1$ et $j \geqslant 2$, on a $j(r+1) = r + (j-1)r + j \geqslant r+3$ donc :

$$\sum_{j=2}^{p} \mathrm{C}_p^j p^{j(r+1)}(1+kp)^{p-j} \equiv 0 \bmod \left[p^{r+3}\right]$$

et enfin :

$$(1+p)^{p^{r+1}} = 1 + p^{r+2} + kp^{r+3} + \sum_{j=2}^{p} \mathrm{C}_p^j p^{j(r+1)}(1+kp)^{p-j} \equiv 1 + p^{r+2} \bmod \left[p^{r+3}\right].$$

La propriété annoncée s'établit donc par récurrence pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Ex. 9

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^{2n+1} divise la partie entière de $\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}$.

> Il faut penser à introduire $\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1}$ en remarquant que $0 < \sqrt{13} - 3 < 1$.

D'après la formule du binôme, il existe a_n et b_n entiers naturels tels que :

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} = a_n\sqrt{13} + b_n$$
$$\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} = a_n\sqrt{13} - b_n$$

en effet, on a :

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^k\, 13^{\frac{k}{2}} \cdot 3^{2n+1-k}$$
$$= \sqrt{13}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j+1}\, 13^j \cdot 3^{2(n-j)} + \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2j}\, 13^j \cdot 3^{2(n-j)+1}$$

$$\left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \complement_{2n+1}^{k}\, 13^{\frac{k}{2}} \cdot (-3)^{2n+1-k}$$
$$= \sqrt{13}\sum_{j=0}^{n} \complement_{2n+1}^{2j+1}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)} - \sum_{j=0}^{n} \complement_{2n+1}^{2j}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)+1}$$

d'où :

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \complement_{2n+1}^{2j+1}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{j=0}^{n} \complement_{2n+1}^{2j}\, 13^{j} \cdot 3^{2(n-j)+1}.$$

On en déduit :

$$\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{13}-3\right)^{2n+1} = 2b_n$$

et, compte tenu de $3 < \sqrt{13} < 4$, donc $0 < \sqrt{13}-3 < 1$, il vient :

$$E\left(\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}\right) = 2b_n\,.$$

Nous sommes donc ramenés à prouver que 2^{2n} divise b_n.

> Il suffit maintenant de prouver que les suites $\left(a_n\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{\mathbb{N}}$ vérifient une relation de récurrence simple pour mettre en place une démonstration par récurrence.

Avec
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+3} &= a_{n+1}\sqrt{13} + b_{n+1}\\ &= \left(\sqrt{13}+3\right)^{2n+1}\left(\sqrt{13}+3\right)^{2}\\ &= \left(a_n\sqrt{13}+b_n\right)\left(22+6\sqrt{13}\right)\\ &= \left(22a_n+6b_n\right)\sqrt{13} + 78a_n + 22b_n\end{aligned}$$

puisque le couple $\left(1, \sqrt{13}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il vient :

$$a_{n+1} = 22a_n + 6b_n \quad , \quad b_{n+1} = 78a_n + 22b_n\,.$$

En écrivant $\left(\sqrt{13}+1\right)^{1} = 1 \cdot \sqrt{13} + 3$, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = 3$, donc 2^0 divise a_0 et b_0 et les quotients (encore égaux à a_0 et b_0) sont de même parité.

Soit maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$: 2^{2n} divise a_n et b_n et les quotients a'_n et b'_n $\left(a_n = 2^n a'_n,\ b_n = 2^n b'_n\right)$ sont de même parité.

En supposant $\mathcal{P}(n)$ vraie, on a donc :

$$a_{n+1} = 2^{2n+1}\left(11a'_n + 3b'_n\right) \quad , \quad b_{n+1} = 2^{2n+1}\left(39a'_n + 11b'_n\right).$$

Les entiers a'_n et b'_n étant de même parité, $11a'_n + 3b'_n$ et $39a'_n + 11b'_n$ sont pairs, c'est-à-dire qu'il existe a'_{n+1} et b'_{n+1} entiers tels que $11a'_n + 3b'_n = 2a'_{n+1}$ et $39a'_n + 11b'_n = 2b'_{n+1}$ d'où aussi :

$$a_{n+1} = 2^{2(n+1)}a'_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2^{2(n+1)}b'_{n+1}\,.$$

Formons enfin $2\left(b'_{n+1} - a'_{n+1}\right) = 28a'_n + 8b'_n = 4\left(7a'_n + 2b'_n\right)$, on en déduit :

$$b'_{n+1} - a'_{n+1} = 2\left(7a'_n + 2b'_n\right),$$

ce qui montre que a'_{n+1} et b'_{n+1} sont de même parité.

On a ainsi prouvé que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire et, puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, le principe de récurrence montre que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la démonstration.

D Divisibilité – Congruences

Ex. 10

Soit p un entier premier avec $p \geqslant 5$. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Il s'agit de prouver que $p^2 - 1$ est divisible par 8 et par 3.

Puisqu'il est premier et différent de 2, l'entier p est impair. On a donc $p \equiv 1 \bmod 4$ ou $p \equiv 3 \bmod 4$.

- Si $p \equiv 1 \bmod 4$ alors 4 divise $p - 1$ et 2 divise $p + 1$ donc 8 divise $p^2 - 1$.
- Si $p \equiv 3 \bmod 4$ alors 4 divise $p + 1$ et 2 divise $p - 1$ donc 8 divise $p^2 - 1$.

De même, puisque p est différent de 3, il n'est pas divisible par 3 et on a $p \equiv 1 \bmod 3$ ou $p \equiv 2 \bmod 3$.

- Si $p \equiv 1 \bmod 3$ alors 3 divise $p - 1$ donc divise $p^2 - 1$.
- Si $p \equiv 2 \bmod 3$ alors 3 divise $p + 1$ donc divise $p^2 - 1$.

Dans tous les cas, 3 et 8 divisent $p^2 - 1$ donc, puisqu'ils sont premiers entre eux, leur produit, 24, divise $p^2 - 1$.

Ex. 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 42 divise $n^{13} - n$.

Avec $42 = 2 \times 3 \times 7$, les nombres 2, 3 et 7 étant premiers, le problème revient à prouver que $n^{13} - n$ est divisible par 2, par 3 et par 7.

- Montrons que 2 divise $n^{13} - n$.

Il suffit de remarquer que n et n^{13} sont de même parité.

- Montrons que 3 divise $n^{13} - n$.

La propriété est évidente si $n \in 3\mathbb{N}$.

Si $n \notin 3\mathbb{N}$, le petit théorème de Fermat donne $n^2 \equiv 1 \bmod 3$ donc $n^{12} \equiv 1 \bmod 3$ puis $n^{13} \equiv n \bmod 3$, et 3 divise $n^{13} - n$.

- Montrons que 7 divise $n^{13} - n$.

Si $n \in 7\mathbb{N}$, c'est évident.

Sinon, pour $n \notin 7\mathbb{N}$, le même théorème donne $n^6 \equiv 1 \bmod 7$ donc $n^{12} \equiv 1 \bmod 7$ puis $n^{13} \equiv n \bmod 7$, et 7 divise $n^{13} - n$.

- Conclusion : puisque $n^{13} - n$ est divisible par les trois nombres premiers 2, 3 et 7, il l'est aussi par leur produit c'est-à-dire par 42.

Ex. 12

Soit λ, μ, a, b des entiers naturels non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n = \frac{\lambda\, a^{n+1} + \mu b^{n+1}}{\lambda\, a^n + \mu b^n}$$

montrer que F_n est irréductible si et seulement si :

$$\lambda a \wedge \mu b = 1 \text{ et } (\lambda + \mu) \wedge (a - b) = 1.$$

> Dès qu'il s'agit de traduire que deux entiers sont premiers entre eux, on se doit de penser au théorème de Bézout mais attention : il est parfois plus simple de raisonner sur les diviseurs communs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \lambda a^n + \mu b^n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$u_{n+1} = (a+b)u_n - abu_{n-1} \tag{$\mathcal{R}$}$$

- Conditions nécessaires

On suppose F_n irréductible avec $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} \wedge u_n = 1$ et, d'après le théorème de Bézout, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$pu_{n+1} + qu_n = 1 \text{ c'est-à-dire } p\left(\lambda a^{n+1} + \mu b^{n+1}\right) + q\left(\lambda a^n + \mu b^n\right) = 1.$$

En écrivant cette relation $\lambda a\left(pa^n + qa^{n-1}\right) + \mu b\left(pb^n + qb^{n-1}\right) = 1$, ce même théorème de Bézout montre que :

$$\lambda a \wedge \mu b = 1. \tag{1}$$

Noter que cela nous donne aussi $\lambda \wedge \mu = 1$, $a \wedge b = 1$, $\lambda \wedge b = 1$, $a \wedge \mu = 1$.

Avec le théorème d'Euclide, la relation $(\mathcal{R})$ donne $u_{n+1} \wedge u_n = u_n \wedge abu_{n-1}$ donc $u_{n+1} \wedge u_n = 1$ équivaut à $u_n \wedge abu_{n-1} = 1$ et, puisque $u_n \wedge u_{n-1}$ divise $u_n \wedge abu_{n-1}$ on en déduit que $u_{n+1} \wedge u_n = 1$ implique $u_n \wedge u_{n-1} = 1$. En conséquence, si F_n est irréductible, c'est-à-dire si $u_{n+1} \wedge u_n = 1$, on obtient $u_1 \wedge u_0 = 1$ c'est-à-dire :

$$(\lambda a + \mu b) \wedge (\lambda + \mu) = 1.$$

Le théorème de Bézout donne alors l'existence de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p(\lambda a + \mu b) + q(\lambda + \mu) = 1$ et, en écrivant cette relation $p\,\mu\,(b-a) + (q+pa)(\lambda + \mu) = 1$ on en déduit :

$$(\lambda + \mu) \wedge (b - a) = 1 \tag{2}$$

- Conditions suffisantes

On suppose que (1) et (2) sont vérifiées et on veut montrer que F_n est irréductible quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrons d'abord que $u_1 \wedge u_0 = 1$.

Puisque $(\lambda + \mu) \wedge (b - a) = 1$, le théorème de Bézout donne l'existence de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$p(\lambda + \mu) + q(b - a) = 1.$$

De même, $\lambda a \wedge \mu b = 1$ donne $\lambda \wedge \mu = 1$ et il existe $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\lambda r + \mu s = 1$ donc :

$$b - a = \lambda r(b-a) + \mu s(b-a) \text{ et } p(\lambda + \mu) + q\,\lambda\, r(b-a) + q\,\mu\, s(b-a) = 1.$$

En écrivant cette dernière relation :

$$(\lambda a + \mu b)(qs - qr) + (\lambda + \mu)(p + bqr - aqs) = 1$$

on voit, toujours avec le théorème de Bézout, que :

$$(\lambda a + \mu b) \wedge (\lambda + \mu) = 1$$

c'est-à-dire :

$$u_1 \wedge u_0 = 1.$$

Montrons maintenant que $u_{n-1} \wedge u_n = 1 \;\Rightarrow\; u_n \wedge u_{n+1} = 1$.

On sait d'après la relation $(\mathcal{R})$ que $u_{n+1} \wedge u_n = u_n \wedge abu_{n-1}$.

Soit p un diviseur premier (ou égal à 1) commun à u_n et u_{n+1} donc commun à u_n et abu_{n-1}.

Puisqu'il est premier (ou égal à 1) et divise abu_{n-1}, l'entier p divise a ou b ou u_{n-1} (conséquence du théorème de Gauss) :

– s'il divise u_{n-1}, c'est un divisieur commun à u_n et u_{n-1} donc $p = 1$;

– s'il divise a alors il divise λa et λa^n puis il divise $u_n - \lambda a^n = \mu b^n$ et, étant premier ou égal à 1, il divise μb. Finalement, il divise λa et μb donc $p = 1$;

– de même s'il divise a, en échangeant les rôles de a et b, on obtient $p = 1$.

Le seul diviseur premier ou égal à 1 commun à u_n et u_{n+1} étant 1, on en conclut que $u_n \wedge u_{n+1} = 1$ ce qui achève la preuve de l'implication.

$$u_{n-1} \wedge u_n = 1 \ \Rightarrow\ u_n \wedge u_{n+1} = 1.$$

Puisque $u_0 \wedge u_1 = 1$, on obtient donc par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \wedge u_{n+1} = 1$, c'est-à-dire que F_n est irréductible.

Ex. 13

1) Par combien de zéros se termine l'écriture de 2004! en base 10 ?

2) Quel est le dernier chiffre non nul ?

1) Il s'agit en fait de déterminer la puissance de 5 dans la décomposition de 2004! en facteurs premiers.

Avec $2004! = \prod_{k=1}^{2004} k$, un groupement des termes donne :

$$\begin{aligned} 2004! &= \prod_{k=0}^{400}(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4) \times \prod_{k=1}^{400} 5k \\ &= 5^{400} \times 400! \times \prod_{k=0}^{400} a_k \end{aligned}$$

où on a posé pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = (5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4).$$

De même :

$$\begin{aligned} 400! &= \prod_{k=0}^{79} a_k \prod_{k=1}^{80} 5k = 5^{80} \times 80! \times \prod_{k=0}^{79} a_k \\ 80! &= \prod_{k=0}^{15} a_k \times \prod_{k=1}^{16} 5k = 5^{16} \times 16! \times \prod_{k=0}^{15} a_k \\ 16! &= \prod_{k=0}^{2} a_k \times \prod_{k=1}^{3} 5k \times 16 = 16 \times 5^{3} \times 3! \times \prod_{k=0}^{2} a_k \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$2004! = 5^{499} A \quad \text{avec} \quad A = 6 \times 16 \times \prod_{k=0}^{400} a_k \times \prod_{k=0}^{79} a_k \times \prod_{k=0}^{15} a_k \times \prod_{k=0}^{2} a_k .$$

Dans la congruence modulo 5, on a :

$$a_k \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \bmod 5 \ \text{ donc } \ a_k \equiv -1 \bmod 5$$
$$6 \equiv 1 \bmod 5 \ \text{ et } \ 16 \equiv 1 \bmod 5$$

donc :

$$A \equiv (-1)^{401+80+16+3} \bmod 5 \quad \text{soit} \quad A \equiv 1 \bmod 5.$$

De façon analogue :

$$2004! = \prod_{k=0}^{1001}(2k+1)\prod_{k=1}^{1002} 2k = 2^{1002} \times 1002! \times \prod_{k=0}^{1001} b_k \quad \text{où on a posé } b_k = 2k+1$$

$$1002! = \prod_{k=0}^{500}(2k+1)\prod_{k=1}^{501} 2k = 2^{501} \times 501! \times \prod_{k=0}^{500} b_k$$

$$501! = \prod_{k=0}^{250}(2k+1)\prod_{k=1}^{250} 2k = 2^{250} \times 250! \times \prod_{k=0}^{250} b_k$$

$$250! = \prod_{k=0}^{124}(2k+1)\prod_{k=1}^{125} 2k = 2^{125} \times 125! \times \prod_{k=0}^{124} b_k$$

$$125! = \prod_{k=0}^{62}(2k+1)\prod_{k=1}^{62} 2k = 2^{62} \times 62! \times \prod_{k=0}^{62} b_k$$

$$62! = \prod_{k=0}^{30}(2k+1)\prod_{k=1}^{31} 2k = 2^{31} \times 31! \times \prod_{k=0}^{30} b_k$$

$$31! = \prod_{k=0}^{15}(2k+1)\prod_{k=1}^{15} 2k = 2^{15} \times 15! \times \prod_{k=0}^{15} b_k$$

$$15! = \prod_{k=0}^{7}(2k+1)\prod_{k=1}^{7} 2k = 2^{7} \times 7! \times \prod_{k=0}^{7} b_k$$

$$7! = \prod_{k=0}^{3}(2k+1)\prod_{k=1}^{3} 2k = 2^{3} \times 3! \times \prod_{k=0}^{3} b_k$$

$$3! = 2 \times 3.$$

Compte tenu de $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k \equiv 1 \bmod 2$, il vient alors :

$$2004! = 2^{1997}B \quad \text{avec} \quad B \equiv 1 \bmod 2.$$

Finalement, on obtient :

$$2004! = 2^{1997} \times 5^{499} \times p = 10^{499} \times 2^{1498} \times p$$

où p est un entier premier avec 2 et 5.

Ainsi, l'écriture de 2004! en base 10 se termine par 499 zéros.

2) Il faut maintenant déterminer le dernier chiffre de l'entier :

$$N = 10^{-499} \times 2004! = 2^{-499}A = 2^{1498}p.$$

> Le nombre N étant pair, son écriture décimale se termine par 2, 4, 6 ou 8 et ces nombres étant respectivement congrus à 2, 4, 1 et 3 modulo 5, nous sommes amenés à évaluer la valeur de N modulo 5, c'est-à-dire la classe $\overline{N}$ de N dans $\mathbb{Z}_{/5\mathbb{Z}}$.

D'après le 1), on a dans $\mathbb{Z}_{/5\mathbb{Z}}$, $\overline{A} = \overline{1}$ donc $\overline{N} = \overline{2}^{-499}$ et, avec $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{1}$, il vient :

$$\overline{2}^{-499} = \overline{2}^{-3-4\times 124} = \overline{2}^{-3} = \overline{2} \quad \text{donc} \quad \overline{N} = \overline{2}.$$

En conséquence, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N = 2 + 5k$, et, puisque N est pair, il en est de même pour k : $k = 2\ell$, d'où finalement :

$$N = 2 + 10\ell$$

ce qui montre que le dernier chiffre de N est 2.

(E) Anneau $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ – Théorème de Fermat

Ex. 14

Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m^{19} \cdot n - m \cdot n^{19}$ est divisible par 798.

On commence, bien sûr, par décomposer 798 en produit de facteurs premiers :

$$798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19.$$

Le problème revient donc à prouver que $A = m^{19} \cdot n - m \cdot n^{19}$ est divisible par 2, 3, 7 et 19.

> C'est le moment de se souvenir du petit théorème de Fermat que l'on peut aussi énoncer sous la forme : si p est premier, pour tout $x \in \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} \setminus \{\overline{0}\}$ on a $x^{p-1} = \overline{1}$ donc pour tout $x \in \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$, $x^p = x$. Ainsi lorsque p est premier, quel que soit $x \in \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$, la suite $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est $p-1$-périodique.

Puisque 19 est premier, dans $\mathbb{Z}_{/19\mathbb{Z}}$ on a $\overline{m}^{19} = \overline{m}$ et $\overline{n}^{19} = n$ donc $\overline{A} = \overline{0}$ et 19 divise A.

Puisque 7 est premier, dans $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}}$ les suites $\left(\overline{m}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{n}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont 6-périodiques, donc :

$$\overline{m}^{19} = \overline{m}^{3\times 6+1} = \overline{m},\ \ \overline{n}^{19} = \overline{n}^{3\times 6+1} = \overline{n} \ \text{ et } \ \overline{A} = \overline{0},$$

ce qui donne 7 divise A.

De même, dans $\mathbb{Z}_{/3\mathbb{Z}}$ les suites $\left(\overline{m}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{n}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont 2-périodiques. On en déduit $\overline{m}^{19} = \overline{m}$, $\overline{n}^{19} = \overline{n}$, $\overline{A} = \overline{0}$ ce qui montre que 3 divise A.

Dans $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$ les suites $\left(\overline{m}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\overline{n}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont constantes (ce qui revient à dire que toutes les puissances d'un entier donné ont la même parité) donc $\overline{A} = \overline{0}$ et 2 divise A.

Étant divisible par les facteurs premiers 2, 3, 7 et 19, le nombre A est divisible par leur produit, c'est-à-dire par 798.

Ex. 15

Montrer que 13 divise $3^{70} + 2^{70}$.

> La question revient à montrer que, dans $\mathbb{Z}_{/13\mathbb{Z}}$, $\overline{3}^{70} + \overline{2}^{70} = \overline{0}$.

13 est un nombre premier donc $F_{13} = \mathbb{Z}_{/13\mathbb{Z}}$ est un corps et, en considérant $G = F_{13} \setminus \{0\}$, puisque Card $G = 12$, on $x^{12} = \overline{1}$, pour tout $x \in G$.

> On peut aussi justifier cette identité avec le petit théorème de Fermat.

Avec $70 = 5 \times 12 + 10$, on obtient alors $\overline{2}^{70} = \left(\overline{2}^{12}\right)^5 \cdot \overline{2}^{10} = \overline{2}^{10}$ et $\overline{3}^{70} = \overline{3}^{10}$.

Formons $\overline{3}^2 = \overline{9}$, $\overline{3}^3 = \overline{27} = \overline{1}$, on en déduit $\overline{3}^{10} = \overline{3}^{3\times 3+1} = \overline{3}$.

De même $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{3}$ donne $\overline{2}^8 = \overline{9}$ puis $\overline{2}^{10} = \overline{36} = -\overline{3}$, d'où enfin :

$$\overline{3}^{10} + \overline{2}^{10} = \overline{3} - \overline{3} = \overline{0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{3}^{70} + \overline{2}^{70} = \overline{0}.$$

Ex. 16

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{3^{4n+3}} + 10$ est divisible par 17.

L'idée de base est que dans le corps $F_{17} = \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, la suite $\left(\overline{3}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique. En effet, $\overline{3}$ appartient au groupe $G_{17} = F_{17} \setminus \{\overline{0}\}$ des inversibles de F_{17} donc l'ordre (multiplicatif) p de cet élément est un diviseur de $\operatorname{Card} G_{17} = 16$, on a alors $p \in \{2, 4, 8, 16\}$, $\overline{3}^p = \overline{1}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{3}^{k+p} = \overline{3}^k$.

Pour préciser la valeur de $\overline{3}^{3^{4n+3}}$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ il va ensuite falloir préciser la valeur de 3^{4n+3} par rapport aux multiples de p, soit aussi préciser la valeur de $\dot{3}^{\,4n+3}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, évaluons $\overline{3}^2, \overline{3}^4, \overline{3}^8$.

$$\overline{3}^2 = \overline{9} \quad , \quad \overline{3}^4 = \overline{9}^2 = -\overline{4} \quad (81 = 5 \times 17 - 4) \quad , \quad \overline{3}^8 = \overline{16}.$$

Inutile de poursuivre : l'ordre p de $\overline{3}$ n'est égal ni à 2, ni à 4, ni à 8.

On en déduit que $\overline{3}$ est d'ordre 16 dans le groupe multiplicatif G_{17}.

- Évaluons maintenant $\dot{3}^{\,4n+3}$ dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.

La situation est légèrement différente, en effet $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ n'est plus un corps. (16 n'est pas premier). Cependant le groupe U_{16} des inversibles de $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ est $\{\dot{2}\,k + \dot{1} \ / 0 \leqslant k \leqslant 7\}$.

$\dot{3}$ est élément de ce groupe, l'ordre q de $\dot{3}$ divise $\operatorname{Card} U = 8$ et la suite $\left(\dot{3}^{\,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est de nouveau périodique de période q avec q diviseur de 8.

Dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, formons $\dot{3}^{\,2} = \dot{9}, \dot{3}^{\,4} = \dot{9}^{\,2} = \dot{1} \quad (81 = 5 \times 16 + 1)$.

L'ordre multiplicatif de $\dot{3}$ dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ est donc $q = 4$ et la suite $\left(\dot{3}^{\,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 4.

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \dot{3}^{\,4n+3} = \dot{3}^{\,3} = \dot{\widehat{27}} = \dot{\widehat{11}}$ soit aussi $3^{4n+3} = 11 + 16k$, $k \in \mathbb{N}$.

- Compte tenu du premier point, on a dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$:

$$\overline{3}^{3^{4n+3}} = \overline{3}^{16k+11} = \overline{3}^{11} = \overline{3}^8 \cdot \overline{3}^3 = \overline{16} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3} = -\overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{3} = -\overline{27}$$

$$\text{soit} \qquad \overline{3}^{3^{4n+3}} = -\overline{10}$$

et finalement $\quad 3^{3^{4n+3}} + 10 \equiv 0 \bmod(17)$.

Ex. 17

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2^{6n+2}} + 3$ est divisible par 19.

Remarque. Cet exercice est résolu par récurrence dans le *Précis d'Algèbre et Géométrie, MP* ; nous allons en proposer ici une autre solution.

Comme dans l'exercice précédent, $\overline{2}$ est un élément inversible du corps $F_{19} = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$, il est donc d'ordre p où p est un diviseur de $\operatorname{Card}\left(F_{19} \setminus \{\overline{0}\}\right) = 18$, $p \in \{2, 3, 6, 9, 18\}$, et la suite $\left(\overline{2}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de F_{19} est périodique de période p.

Dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$, formons $\overline{2}^2 = \overline{4}, \overline{2}^3 = \overline{8}, \overline{2}^6 = \overline{8}^2 = \overline{64} = \overline{7}, \overline{2}^9 = \overline{2}^6 \cdot \overline{2}^3 = \overline{56} = -\overline{1}, \overline{2}^{18} = \overline{1}$.

On en déduit que $\overline{2}$ est d'ordre 18 et donc que la suite $\left(\overline{2}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 18.

Il y a maintenant lieu de placer 2^{6n+2} par rapport aux multiples de 18, c'est-à-dire d'évaluer $\dot{2}^{6n+2}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ alors que $\dot{2}$ n'est pas dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. On peut, cependant, justifier le caractère périodique de la suite $(\dot{2}^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par la finitude de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$; en effet, $\mathbb{N}^*$ étant infini et $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ fini, l'application $k \mapsto \dot{2}^k$ est non injective et il existe $(u, v) \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u \leqslant v$, tels que $\dot{2}^v = \dot{2}^u$ ce qui donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dot{2}^{v+k} = \dot{2}^{u+k}$: la suite $(\dot{2}^k)$ est périodique de période $v - u$.

Dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, formons $\dot{2}^2 = \dot{4}$, $\dot{2}^3 = \dot{8}$, $\dot{2}^4 = \dot{\widehat{16}} = -\dot{2}$, $\dot{2}^5 = -\dot{4}$, $\dot{2}^6 = -\dot{8}$, $\dot{2}^7 = -\dot{\widehat{16}} = \dot{2}^1$.

De $\dot{2}^7 = \dot{2}^1$, on déduit que la suite $(\dot{2})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est périodique de période 6 et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \dot{2}^{6n+2} = \dot{2}^2 \text{ c'est-à-dire } 2^{6n+2} \equiv 4 \bmod(18) \text{ ou encore } 2^{6n+2} = 4 + 18h, h \in \mathbb{N}.$$

Compte tenu du début de l'étude, il vient dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$:

$$\overline{2}^{2^{6n+2}} = \overline{2}^{4+18h} = \overline{2}^4 = \overline{16} = -\overline{3}$$

$$\text{donc} \qquad 2^{2^{6n+2}} + 3 \equiv 0 \bmod(19).$$

Ex. 18

Soit n un entier $\geqslant 3$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.

1) Montrer que $\mathbb{U}$ est un groupe multiplicatif.

2) Calculer $x^{2^{n-2}}$ pour tout $x \in \mathbb{U}$.

3) Trouver le plus petit entier $k > 0$ tel que $3^k \equiv 1 \bmod 2^n$.

4) Montrer que $\mathbb{U}$ est isomorphe au produit de groupes additifs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$.

1) C'est du cours.

2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $\overline{k}$ la classe de k modulo 2^n.

On sait qu'un élément $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si k et 2^n sont premiers entre eux donc si et seulement si k est impair.

Il en résulte $\mathbb{U} = \{\overline{2k+1}, 0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1\}$ et donc $\operatorname{Card}\mathbb{U} = 2^{n-1}$.

Il est bien connu que dans un groupe multiplicatif G de cardinal ν, pour tout $x \in G$, on a $x^\nu = 1\!\!1_G$ (où $1\!\!1_G$ désigne l'élément neutre de G).

Dans le cas présent, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{U}, x^{2^{n-1}} = \overline{1}$$

mais cela ne fournit pas la réponse à la question posée. Il faut donc envisager une autre approche de l'étude des x^{2^k} : essayons de procéder par récurrence.

Soit $x \in \mathbb{U}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x = \overline{2p+1}$, $0 \leqslant p \leqslant 2^{n-1} - 1$.

Formons $(2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p+1) + 1$. Puisque le produit $p(p+1)$ est pair : $p(p+1) = 2q$, on obtient $(2p+1)^2 = 8q + 1$, c'est-à-dire $(2p+1)^2 \equiv 1 \bmod 2^3$.

Il est peut-être un peu tôt pour avancer une hypothèse de récurrence et nous allons continuer cette exploration en formant $(2p+1)^{2^2}$.

Avec $(2p+1)^2 = 2^3q+1$, on obtient $(2p+1)^{2^2} = \left(2^3q+1\right)^2 = 2^6q^2+2^4q+1 = 2^4q\left(2^2q+1\right)+1$ et donc :

$$(2p+1)^{2^2} \equiv 1 \bmod 2^4.$$

Posons alors l'hypothèse de récurrence :

$$H(k)\ :\ (2p+1)^{2^k} \equiv 1 \bmod 2^{k+2}$$

$H(k)$ se lit $(2p+1)^{2^k} = 2^{k+2}q+1$ et on en déduit :

$$(2p+1)^{2^{k+1}} = \left(2^{k+2}q+1\right)^2 = 2^{2k+4}q^2+2^{k+3}q+1$$

donc :

$$(2p+1)^{2^{k+1}} = 2^{k+3}q\left(2^{k+1}q+1\right) \quad \text{soit aussi} \quad (2p+1)^{2^{k+1}} \equiv 1 \bmod 2^{k+3}.$$

On a ainsi montré $H(k) \Rightarrow H(k+1)$ et, puisque $H(1)$ est vraie, cette propriété $H(k)$ l'est aussi quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte en particulier :

$$x^{2^{n-2}} = \left(\overline{2p+1}\right)^{2^{n-2}} = \overline{(2p+1)^{2^{n-2}}} = \overline{1} \text{ dans } \mathbb{Z}_{/2^n\mathbb{Z}}.$$

3) Le plus petit entier k tel que $3^k \equiv 1 \bmod 2^n$ est l'ordre de l'élément $\overline{3}$ dans le groupe $\mathbb{U}$ c'est-à-dire aussi Card $\left(\text{gr}\left(\overline{3}\right)\right)$ où gr $\left(\overline{3}\right)$ est le sous-groupe (multiplicatif) de $\mathbb{U}$ engendré par $\overline{3}$. Notons p cet ordre.

On sait que l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{Z} \,/\, \overline{3}^k = \overline{1}\right\}$ est le sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ engendré par p. Ce n'est autre que $\text{Ker}\,\varphi$ où φ est le morphisme :

$$(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{U},\times),\ k \mapsto \overline{3}^k.$$

D'après le 1), on a, avec les notations de la remarque précédente, $2^{n-2} \in \text{Ker}\,\varphi$. Donc p est un diviseur de 2^{n-2} c'est-à-dire qu'il existe $q \in [\![1, n-2]\!]$ tel que $p = 2^q$.

Reprenons maintenant la récurrence du 2) : si on suppose $a^{2^k} = 2^{k+2}b+1$ avec b impair, on obtient :

$$a^{2^{k+1}} = 2^{k+3}b'+1 \quad \text{avec} \quad b' = b\left(2^{k+1}b+1\right)$$

donc b' est impair. En conséquence, puisque pour $a = 3$, on a $3^{2^0} = 2 \times 1 + 1$ avec 1 impair, on obtient par récurrence que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$:

$$3^{2^k} = 2^{k+2}b+1 \quad \text{avec} \quad b \text{ impair.}$$

Il en résulte que, pour $k < n-2$, on a $3^{2^k} - 1 \not\equiv 0 \bmod 2^n$ et donc :

$$3^{2^q} - 1 \equiv 0 \bmod 2^n \quad \text{implique} \quad q \geqslant n-2.$$

Comme on a vu que $q \in [\![1, n-2]\!]$, on en conclut finalement $q = n-2$ et $\overline{3}$ est d'ordre $p = 2^{n-2}$.

4) En dehors du cas de $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$, les groupes quotients ne sont pas au programme, on ne peut donc pas résoudre cette question en faisant appel à la décompostion canonique d'un morphisme de groupes. Nous allons prouver l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{U}$ en exhibant un élément α de $\mathbb{U}$, d'ordre 2, et tel que tout x de $\mathbb{U}$ s'écrive $x = \alpha^u\overline{3}^v$.

Posons $H = \text{gr}\left(\overline{3}\right)$. D'après le 3), H est le sous-groupe cyclique d'ordre 2^{n-2} de $\mathbb{U}$ engendré par $\overline{3}$; il est isomorphe à $\mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}}$.

L'élément $h = \overline{3}^{2^{n-3}}$ de H vérife $h^2 = \overline{3}^{2^{n-2}} = \overline{1}$ donc $\alpha = -h$ vérifie également $\alpha^2 = \overline{1}$.

Il est maintenant utile de prouver que $\alpha \notin H$ et pour cela, répertorions les solutions dans H de l'équation $x^2 = \overline{1}$.

Dans H, l'équation $x^2 = \overline{1}$ s'écrit $\overline{3}^{2k} = \overline{1}$ avec $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-2}$ et elle équivaut à $2k \in \operatorname{Ker} \varphi$ (notations du 3)) donc :

$$2k = j \cdot 2^{n-2} \quad \text{soit encore} \quad k = j \cdot 2^{n-3},\ j \in \mathbb{N}.$$

Avec $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-2}$ on obtient $j = 1$ ou $j = 2$, ce qui montre que l'équation $x^2 = \overline{1}$ possède exactement deux solutions dans H qui sont :

$$\overline{3}^{2^{n-3}} = h\ (j = 1) \quad \text{et} \quad \overline{3}^{2^{n-2}} = \overline{1}\ (j = 2).$$

> Il reste à remarquer que $a \neq \overline{1}$ et $a \neq h$ pour pouvoir affirmer que $a \notin H$.

D'après le 3), on a $3^{2^{n-3}} = 2^{n-1}(2b+1) + 1$ donc $3^{2^{n-3}} + 1 = 2\left(2^{n-1}b + 2^{n-2} + 1\right)$ et, puisque $n \geqslant 3$, $2^{n-1}b + 2^{n-2} + 1$ est impair. On en déduit $3^{2^{n-3}} + 1 \not\equiv 0 \bmod 2^n$ c'est-à-dire :

$$h + \overline{1} \neq \overline{0} \quad \text{ou encore} \quad a \neq \overline{1}.$$

De même, puisque $2 \cdot 3^{2^{n-3}} \not\equiv 0 \bmod 2^n$, on a $2h \neq \overline{0}$ donc $a \neq h$.

Ainsi a est racine de l'équation $x^2 = \overline{1}$ et a est distinct de $\overline{1}$ et h qui sont les racines de cette équation dans H donc $a \notin H$.

Considérons maintenant l'application :

$$\Psi : \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}} \to \mathbb{U},\ (\dot{u}, \ddot{v}) \mapsto a^u \overline{3}^v.$$

> Nous notons ici $\dot{u}$ l'élément de $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$ de représentant u et $\ddot{v}$ l'élément de $\mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}}$ de représentant v. Puisque a et $\overline{3}$ sont d'ordres respectifs 2 et 2^{n-2}, si $u' \equiv u \bmod 2$, on a $a^{u'} = a^u$, et si $v' \equiv v \bmod 2^{n-2}$, on a $\overline{3}^{v'} = \overline{3}^v$; on définit donc bien une application en posant :
>
> $$\Psi(\dot{u}, \ddot{v}) = a^u \overline{3}^v.$$

On vérifie que ψ est un morphisme de groupes. En effet, avec :

$$(\dot{u}, \ddot{v}) + (\dot{u}', \ddot{v}') = (\overset{\cdot}{\widehat{u+u'}}, \overset{\cdot\cdot}{\widehat{v+v'}})$$

on obtient :

$$\Psi\Big((\dot{u}, \ddot{v}) = (\dot{u}', \ddot{v}')\Big) = a^{u+u'}\overline{3}^{v+v'} = a^u\overline{3}^v a^{u'}\overline{3}^{v'} = \Psi(\dot{u}, \ddot{v})\ \Psi(\dot{u}', \ddot{v}').$$

Puis on montre que ce morphsime est injectif en vérifiant que $\operatorname{Ker}\Psi = \{(\dot{0}, \ddot{0})\}$. En effet, $(\dot{u}, \ddot{v}) \in \operatorname{Ker}\Psi$ s'écrit $a^u\overline{3}^v = \overline{1}$ c'est-à-dire $a^u = \overline{3}^{-v}$; l'éventualité $\dot{u} = \dot{1}$ est à rejeter puisque cela donne $a = \overline{3}^{-v} \in H$; on a donc $\dot{u} = \dot{0}$ et $\overline{3}^{-v} = \overline{1}$ ce qui, puisque $\overline{3}$ est d'ordre 2^{n-2}, donne 2^{n-2} divise v et finalement $\dot{u} = \dot{0}$ et $\ddot{v} = \ddot{0}$.

Sachant que $\operatorname{Card}\mathbb{U} = 2^{n-1} = \operatorname{Card}\left(\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}}\right)$, l'injectivité de Ψ assure sa bijectivité. On a ainsi exhibé un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2^{n-2}\mathbb{Z}}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

Ex. 19

On note $\mathbb{U}$ le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_{/32\mathbb{Z}}$.

1) Donner l'ordre multiplicatif de 5 modulo 32.

2) Trouver un groupe additif isomorphe à $\mathbb{U}$.

1) Étant donné $n \in \mathbb{Z}$, nous notons $\overline{n}$ sa classe modulo 32. On sait que $\overline{n}$ est inversible dans $\mathbb{Z}_{/32\mathbb{Z}}$ si et seulement si $n \wedge 32 = 1$. Ainsi, puisque $32 = 2^5$, $\overline{n}$ est inversible si et seulement si n est impair :

$$\mathbb{U} = \left\{ \overline{2k+1} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \overline{2k+1} \;/\; k \in [\![0, 15]\!] \right\}.$$

L'ordre multiplicatif de 5 modulo 32 est l'ordre de $\overline{5}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

Si p est cet ordre, on a $p = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \;/\; \overline{5}^k = \overline{1} \right\}$ et on sait que p divise $\operatorname{Card} \mathbb{U} = 16$ donc :

$$p \in \{2, 4, 8, 16\}.$$

Formons alors :

$$\begin{aligned}
\overline{5}^2 &= \overline{25} = -\overline{7} &\qquad (25 = 32 - 7)\\
\overline{5}^4 &= \overline{49} = -\overline{15} &\qquad (49 = 64 - 15)\\
\overline{5}^8 &= \overline{225} = \overline{1} &\qquad (225 = 7 \times 32 + 1)
\end{aligned}$$

On en déduit $p = 8$.

2) D'après le 1), $-\overline{15}$ et donc aussi $\overline{15}$ sont d'ordre 2.

Considérons alors l'application $\Phi \;:\; \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}} \to \mathbb{U},\ \left(\dot{\alpha}, \ddot{\beta} \right) \mapsto \overline{15}^{\alpha}\, \overline{5}^{\beta}$.

$\dot{\alpha}$ représente la classe de α modulo 2 et $\ddot{\beta}$ la classe de β modulo 8.

Si $\dot{\alpha}' = \dot{\alpha}$ on a $\alpha' = \alpha + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\overline{15}^{\alpha'} = \overline{15}^{\alpha}$ puisque $\overline{15}$ est d'ordre 2 et si $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}$ on a $\beta' = \beta + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$, donc $\overline{5}^{\beta'} = \overline{5}^{\beta}$ puisque $\overline{5}$ est d'ordre 8.

Ainsi, on définit bien une application de $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{U}$ en posant $\Phi\left(\dot{\alpha}, \ddot{\beta} \right) = \overline{15}^{\alpha}\, \overline{5}^{\beta}$ puisque $\overline{15}^{\alpha}\, \overline{5}^{\beta}$ est indépendant des représentants choisis pour les classes $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$.

Φ est un morphsime de groupes. En effet :

$$\begin{aligned}
\Phi\Big(\left(\dot{\alpha}, \ddot{\beta} \right) + \left(\dot{\alpha}', \ddot{\beta}' \right) \Big) &= \Phi\Big(\left(\dot{\widehat{\alpha + \alpha'}} \right) + \left(\ddot{\widehat{\beta + \beta'}} \right) \Big)\\
&= \overline{15}^{\alpha+\alpha'}\, \overline{5}^{\beta+\beta'}\\
&= \overline{15}^{\alpha}\overline{5}^{\beta} \cdot \overline{15}^{\alpha'}\overline{5}^{\beta'}\\
&= \Phi\left(\dot{\alpha}, \ddot{\beta} \right) \cdot \Phi\left(\dot{\alpha}', \ddot{\beta}' \right).
\end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit d'un morphisme de groupes, pour prouver que Φ est injectif, il suffit de vérifier que son noyau est réduit à $\left(\dot{0}, \ddot{0} \right)$.

La condition $\left(\dot{\alpha}, \ddot{\beta} \right) \in \operatorname{Ker} \Phi$ s'écrit $\overline{15}^{\alpha}\, \overline{5}^{\beta} = \overline{1}$ soit aussi $\overline{5}^{\beta} = \overline{15}^{2-\alpha}$.

Notons $\operatorname{gr}\left(\overline{5}\right)$ et $\operatorname{gr}\left(\overline{15}\right)$ les sous-groupes de $\mathbb{U}$ engendrés respectivement par $\overline{5}$ et $\overline{15}$:

$$\operatorname{gr}\left(\overline{5}\right) = \left\{ \overline{1}, \overline{5}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{17}, \overline{21}, \overline{9}, \overline{13} \right\} \quad , \quad \operatorname{gr}\left(\overline{15}\right) = \left\{ \overline{1}, \overline{15} \right\}.$$

On a $\operatorname{gr}\left(\overline{5}\right) \cap \operatorname{gr}\left(\overline{15}\right) = \left\{ \overline{1} \right\}$ donc l'égalité $\overline{5}^{\beta} = \overline{15}^{2-\alpha}$ donne $\overline{5}^{\beta} = \overline{15}^{2-\alpha} = \overline{1}$ soit aussi $\alpha \in 2\mathbb{Z}$ et $\beta \in 8\mathbb{Z}$ et finalement $\dot{\alpha} = \dot{0}$, $\ddot{\beta} = \ddot{0}$.

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} \Phi = \left\{ \left(\dot{0}, \ddot{0} \right) \right\}$, le morphisme Φ est donc injectif et, puisque $\operatorname{Card} \mathbb{U} = 16 = \operatorname{Card} \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$, on en déduit que c'est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$.

Ex. 20

1) Montrer qu'un entier naturel congru à 42 modulo 72 n'est pas la somme de moins, au sens large, de 9 carrés d'entiers impairs.

2) Un entier congru à 7 modulo 8 peut-il être la somme de 3 carrés d'entiers.

---

1) Commençons par déterminer l'ensemble des $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}$ tels que $\overline{x} = \overline{(2k+1)}^2$.

> Puisque $72 = 2^3 \times 3^2$, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}$ sont les $\overline{x}$ tels que x ne soit divisible ni par 2, ni par 3. Pour la recherche des $\overline{x}$ tels que $\overline{x} = \overline{(2k+1)}^2$, il va être intéressant de placer $2k+1$ par rapport aux multiples de 6.

Un entier impair peut être congru à 3, 1, ou -1 modulo 6.

- Premier cas : $\overline{x} = \overline{(6k+3)}^2$ alors $\overline{x} = \overline{9(2k+1)^2} = \overline{9\left[4k(k+1)+1\right]} = \overline{72\,\ell+9}$ car $k(k+1) = 2\ell$ donc $\overline{x} = \overline{9}$.
- Deuxième cas : $\overline{x} = \overline{(6k+1)}^2$ alors $\overline{x} = \overline{36k^2+12k+1}$.

– Si k est pair : $k = 2\ell$, $\overline{x} = \overline{144\ell^2} + \overline{24\ell} + \overline{1} = \overline{1} + \ell\cdot\overline{24}$ et on en déduit $\overline{x} \in \left\{\overline{1}, \overline{25}, \overline{49}\right\}$.

> $\left\{\overline{0}, \overline{24}, \overline{48}\right\} = \left\{\ \ell\cdot\overline{24}\ /\ \ell \in \mathbb{Z}\ \right\}$ est le sous-groupe additif engendré par $\overline{24}$.

– Si k est impair : $k = 2\,\ell+1$, $\overline{x} = \overline{36\times 4\,\ell\,(\ell+1)} + \overline{36} + \overline{24\ell} + \overline{12} + \overline{1} = \overline{49} + \ell\cdot\overline{24}$ et on retrouve $x \in \left\{\overline{1}, \overline{25}, \overline{49}\right\}$.

- Troisième cas : $\overline{x} = \overline{(6k-1)}^2$ alors $\overline{x} = \overline{36k^2-12k+1} = \overline{36k^2+12k+1} - k\cdot\overline{24}$ donc, compte tenu du calcul précédent, on obtient encore $\overline{x} \in \left\{1+\ell\cdot\overline{24}\ /\ \ell \in \mathbb{Z}\right\}$ c'est-à-dire $\overline{x} \in \left\{\overline{1}, \overline{25}, \overline{49}\right\}$.

Finalement, on a prouvé que $C = \left\{\overline{(2k+1)}^2\ /\ \overline{2k+1} \in \mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}\right\} \subset \left\{\overline{1}, \overline{9}, \overline{25}, \overline{49}\right\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, il y a égalité.

> Il semble que la seule approche raisonnable de ce genre de question soit le raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'un entier naturel congru à 42 modulo 72 soit la somme de p carrés d'entiers impairs avec $1 \leqslant p \leqslant 9$. Dans $\mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}$ cette hypothèse se lit :

$$\overline{42} = \sum_{i=1}^{p} \overline{(2a_i+1)}^2 \quad \text{soit} \quad \overline{42} = \sum_{i=1}^{p} \overline{4a_i(a_i+1)+1}$$

donc, avec $a_i(a_i+1) = 2\ell_i$, il vient $42 = 8\sum_{i=1}^{p} \ell_i + p + 72k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$, cette dernière relation donne $\dot{\widehat{42}} = \dot{p}$, c'est-à-dire $\dot{p} = \dot{2}$ et, compte tenu de $1 \leqslant p \leqslant 9$, on en déduit $p = 2$.

> Il y a donc une seule possibilité pour p et, puisque $\mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}$ ne contient que 4 carrés de la forme $\overline{(2k+1)}^2$, il ne nous reste que 10 cas à explorer.

La table suivante donne les éléments de $\mathbb{Z}_{/72\mathbb{Z}}$ qui sont sommes de deux carrés d'éléments de représentants impairs.

	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{25}$	$\overline{49}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{26}$	$\overline{50}$
$\overline{9}$		$\overline{18}$	$\overline{34}$	$\overline{58}$
$\overline{25}$			$\overline{50}$	$\overline{2}$
$\overline{49}$				$\overline{26}$

L'élément $\overline{42}$ n'appartient pas à cet ensemble d'où la conclusion.

2) Pour réaliser $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \bmod 8$, il est nécessaire qu'un ou trois des entiers x, y, z soient impairs et on remarque qu'une telle équation est symétrique en (x, y, z).

Pour x, y et z impairs : $x = 21a + 1$, $y = 2b + 1$, $z = 2c + 1$, sachant que 8 divise $4a(a+1)$, $4b(b+1)$ et $4c(c+1)$, dans $\mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$ on obtient $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = \overline{3}$, donc $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 \neq \overline{7}$, et il n'y a pas de solution dans ce cas.

Pour x impair, y et z pairs : $x = 2a + 1$, $y = 2b$, $z = 2c$, dans $\mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$ on obtient :

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = \overline{1} + \overline{4b^2} + \overline{4c^2}$$

donc $\quad \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 \in \left\{\overline{1} + k\overline{4} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

c'est-à-dire $\quad \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 \in \left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$.

Puisque cet ensemble $\left\{\overline{1}, \overline{5}\right\}$ ne contient pas $\overline{7}$, il n'y a toujours pas de solution dans ce cas.

Ex. 21

Soit p un nombre entier premier de la forme $p = 3q + 1$.

1) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} \setminus \left\{\overline{0}\right\}$ tel que $a^q \neq \overline{1}$.

2) En déduire que $-\overline{3}$ est un carré de $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$.

3) Réciproque ?

1)

> Dire que $a^q \neq 1$ revient à dire que a n'est pas racine du polynôme $P = X^q - 1$.
> C'est donc le moment de se souvenir que si K est un corps quelconque (commutatif d'après le programme en vigueur), un polynôme $P \in K[X]$ de degré q admet au plus q racines distinctes.

Remarquons d'abord que q est non nul, car $q = 0$ donne $p = 1$ qui n'est pas un nombre premier, et que p étant impair, $3q = p - 1$ est pair donc q est pair.

Nous posons $F_p = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ et $G_p = F_p \setminus \left\{\overline{0}\right\}$. Puisque p est premier, F_p est un corps (corps de Fermat) et G_p est le groupe multiplicatif de ce corps.

Le polynôme $X^q - \overline{1} \in F_p[X]$ admet au plus q racines distinctes dans F_p donc, puisque $\operatorname{Card} G_p = 3q > q$, il existe au moins $2q$ éléments a de G_p tels que $a^q - \overline{1} \neq \overline{0}$.

2) Puisque G_p est un groupe d'ordre (ou cardinal) $3q$, pour tout $x \in G_p$ on a $x^{3q} = \overline{1}$.

Considérons alors $a \in G_p$ tel que $a^q - \overline{1} \neq \overline{0}$ et développons $\left(a^q - \overline{1}\right)^3$. On obtient :

$$\left(a^q - \overline{1}\right)^3 = a^{3q} - 3a^{2q} + 3a^q - \overline{1} = -\overline{3} \cdot a^q\left(a^q - \overline{1}\right)$$

et puisque $a^q\left(a^q - \overline{1}\right) \in G_p$, il vient $-\overline{3} = \dfrac{\left(a^q - \overline{1}\right)^2}{a^q}$.

Sachant que q est pair : $q = 2r$, on peut enfin écrire :

$$-\overline{3} = \left(\frac{a^{2r} - \overline{1}}{a^r}\right)^2$$

ce qui met en évidence que $-\overline{3}$ est un carré de F_p.

3) Réciproque : on suppose que p est un entier premier $\neq 2$, il s'agit de montrer que si $-\overline{3}$ est un carré de F_p alors p est de la forme $3q + 1$, ce qui revient à dire que 3 divise $p - 1$. Il suffit donc de montrer que G_p contient un élément d'ordre 3.

On suppose qu'il existe $b \in F_p$ tel que $b^2 = -\overline{3}$. On a donc $b^3 = -3b$ soit $b^3 + 3b = \overline{0}$ d'où :

$$\left(\overline{1} + b\right)^3 = 3b^2 + \overline{1} = -\overline{8} \quad \text{et} \quad \left(\overline{1} - b\right)^3 = 3b^2 + \overline{1} = -\overline{8}.$$

Puisque $p \neq 2$, on a $-\overline{8} \neq \overline{0}$ et les relations précédentes donnent :

$$\left(\frac{\overline{1} + b}{\overline{1} - b}\right)^3 = \overline{1}.$$

Ainsi, l'élément $x = \dfrac{\overline{1} + b}{\overline{1} - b}$ de G_p est d'ordre 3, donc 3 divise Card $G = p - 1$ et p est de la forme $3q + 1$.

Remarquons que, pour $p = 2$, on a $-\overline{3} = \overline{1}$ (dans $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$) donc $-\overline{3} = \overline{1}^2$. La réciproque précédente n'est donc vraie que si on suppose $p \geqslant 3$.

Ex. 22

1) Montrer que p est premier si et seulement si $(p - 1)! + 1$ est congru à 0 modulo p.

2) Soit p un entier premier de la forme $4n + 1$.
Montrer que -1 a une racine carrée dans $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$.

1) C'est le théorème de Wilson. Il s'agit bien d'un résultat classique, mais hors programme, qui est visiblement donné ici en préliminaire à la question 2).

La propriété est vraie pour $p = 2$, on suppose donc maintenant $p \geqslant 3$.

- Supposons que p est premier. Dans ce cas, p est impair : $p = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $F_p = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ est un corps et $G_p = F_p \setminus \{\overline{0}\}$ est un groupe multiplicatif.

Tout élément $x \in G_p$ a son inverse $\dfrac{1}{x}$ dans G_p et on a $x = \dfrac{1}{x}$ si et seulement si $x^2 = \overline{1}$ c'est-à-dire :

$$\left(x - \overline{1}\right)\left(x + \overline{1}\right) = \overline{0} \quad \text{soit aussi} \quad x \in \{\overline{1}, -\overline{1}\} = \{\overline{1}, \overline{p-1}\}.$$

En conséquence, il existe $x_1, \ldots, x_{q-1}$ distincts dans $G_p \setminus \{\overline{1}, \overline{p-1}\}$ tels que :

$$G_p \setminus \{\overline{1}, \overline{p-1}\} = \{\overline{2}, \ldots, \overline{p-2}\} = \left\{x_1, \frac{1}{x_1}, x_2, \frac{1}{x^2}, \ldots, x_{q-1}, \frac{1}{x_{q-1}}\right\}$$

et, puisque $\forall k \in [\![1, q-1]\!]$, $x_k \cdot \dfrac{1}{x_k} = \overline{1}$, il vient :

$$\overline{(p-2)!} = \overline{2} \cdot \overline{3} \cdot \ldots \cdot \overline{(p-2)} = \prod_{k=1}^{q-1} x_k \cdot \frac{1}{x_k} = \overline{1}.$$

On en déduit enfin :

$$\overline{(p-1)!} = \overline{(p-2)!}\ \overline{(p-1)} = \overline{(p-1)} = -\overline{1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (p-1)! \equiv -1 \bmod p.$$

- Supposons maintenant $\overline{(p-1)!} = -\overline{1}$ dans $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$.

Soit a un diviseur premier de p et b tel que $p = ab$. On a alors $2 \leqslant a \leqslant p$ et $1 \leqslant b \leqslant p-1$.
L'hypothèse $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ donne $a(p-1)! \equiv -a \bmod p$.
Or $(p-1)!$ contient le facteur b, donc $(p-1)! = bq$ et $a(p-1)! = abq = pq$.
Avec $a(p-1)! \equiv -a \bmod p$, on en déduit :

$$a \equiv -pq \bmod p \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \equiv 0 \bmod p.$$

Ainsi, a divise p et p divise a, donc $a = p$ ce qui prouve que p est premier.

2) Pour $p = 4n+1$, on peut écrire :

$$G_p = \left\{ -\overline{2n}, \ldots, -\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{2n} \right\}$$

et le théorème de Wilson donne :

$$-\overline{1} = \overline{(p-1)!} = \overline{(4n)!} = \prod_{\overline{k} \in G_p} \overline{k} = \prod_{k=1}^{2n} \left(-\overline{k} \cdot \overline{k} \right)$$

soit encore :

$$-\overline{1} = \prod_{k=1}^{2n} \overline{k}^2 \quad \text{ou aussi} \quad -\overline{1} = \overline{(2n)!}^2.$$

Ex. 23

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2^{1994} + 2^{1998} + 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} + 2^n$.
Montrer que l'ensemble $\left\{ A_n \,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$ ne contient pas de carré parfait.

> L'attaque frontale de la question est impossible, l'idée est que si A_n est un carré parfait alors dans tout anneau $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$, $\overline{A}_n$ est un carré parfait. Il suffit donc, pour conclure, d'exhiber un entier m tel que dans $\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$, $\overline{A}_n$ ne soit pas un carré parfait.

On remarque d'abord que $A_n = \left(1 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7\right) 2^{1994} + 2^n = 241 \cdot 2^{1994} + 2^n$.

- Supposons n pair : $n = 2p$.

Avec $2^2 \equiv 1 \bmod 3$, on obtient alors $2^{1994} \equiv 1 \bmod 3$ et $2^{2p} \equiv 1 \bmod 3$. Donc, puisque $241 \equiv 1 \bmod 3$, il vient, dans $\mathbb{Z}_{/3\mathbb{Z}}$, $\overline{A}_n = \overline{2}$. Or $\overline{2}$ n'est pas un carré parfait dans $\mathbb{Z}_{/3\mathbb{Z}}$ (en effet, on a $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{2}^2 = \overline{1}$, donc seuls $\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont des carrés parfaits) donc A_n n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$.

- Supposons maintenant n impair : $n = 2p+1$.

> Selon que n est supérieur ou inférieur à 1994, la factorisation des puissances de 2 dans A_n est différente, ce qui nous amène à distinguer les cas $n \leqslant 1994$ et $n \geqslant 1995$.

Premier cas : $n \leqslant 1994$ (en fait, $n \leqslant 1993$ puisque n est impair)
On a alors $A_n = 2^{2p}\left(2 + 241 \cdot 2^{1994-2p}\right)$ et puisque 2^{2p} est un carré parfait, pour que A_n en soit un, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour $A'_n = 2 + 241 \cdot 2^{1994-2p}$.
Avec $2p \leqslant 1992$, on voit que $2^{1994-2p}$ est divisible par 4 donc, dans $\mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}}$ on a $\overline{A'_n} = \overline{2}$. Or $\overline{2}$ n'est pas un carré parfait dans $\mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}}$ (on a en effet $\overline{0}^2 = \overline{2}^2 = \overline{1}$ et $\overline{1}^2 = \overline{3}^2 = \overline{1}$ donc seuls $\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont des carrés parfaits), il en résulte que A_n n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$.

Deuxième cas : $n \geqslant 1995$

On a alors $A_n = 2^{1994}\left(241 + 2^{n-1994}\right)$ et puisque 2^{1994} est un carré parfait, A_n en est un si et seulement si $A_n'' = 241 + 2^{n-1994}$ en est un également.

Puisque n est impair, il en est de même pour $n - 1994$ et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n - 1994 = 2q + 1$ donc $A_n'' = 241 + 2^{2q+1}$.

- Si $q \equiv 0 \bmod 3$ alors $A_n'' = 241 + 2^{6k+1}$. Or, dans $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}}$, on a $\overline{2}^3 = \overline{1}$ et $\overline{241} = \overline{3}$ donc $\overline{A_n''} = \overline{3} + \overline{2} = \overline{5}$ et $\overline{5}$ n'est pas un carré parfait de $\mathbb{Z}_{/7\mathbb{Z}}$ (en effet on a $\overline{0}^2 = \overline{0}, \overline{1}^2 = \overline{6}^2 = \overline{1}, \overline{2}^2 = \overline{5}^2 = \overline{4}, \overline{3}^2 = \overline{4}^2 = \overline{2}$ donc seuls $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ et $\overline{4}$ sont des carrés parfaits), il en résulte que A_n'' n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$ et il en est de même pour A_n .
- Si $q \equiv 1 \bmod 3$ alors $A_n'' = 241 + 2^{6k+3}$. Plaçons-nous maintenant dans $\mathbb{Z}_{/9\mathbb{Z}}$, on a alors $\overline{2}^6 = \overline{1}$ et $\overline{241} = \overline{7}$ donc $\overline{2}^{6k+3} = \overline{2}^3 = \overline{8} = -\overline{1}$ et $\overline{A_n''} = \overline{6}$. Or les seuls carrés parfaits de $\mathbb{Z}_{/9\mathbb{Z}}$ sont : $\overline{0} = \overline{0}^2 = \overline{3}^2 = \overline{6}^2, \overline{1} = \overline{1}^2 = \overline{8}^2, \overline{4} = \overline{2}^2 = \overline{7}^2$ et $\overline{7} = \overline{4}^2 = \overline{5}^2$, en conséquence $\overline{A_n''}$ n'est pas un carré de $\mathbb{Z}_{/9\mathbb{Z}}$, A_n'' n'est pas un carré de $\mathbb{N}$ et A_n n'est pas un carré de $\mathbb{N}$.
- Si $q \equiv 2 \bmod 3$ alors $A_n'' = 241 + 2^{6k+5}$. Dans $\mathbb{Z}_{/9\mathbb{Z}}$, on obtient $\overline{A_n''} = \overline{7} + \overline{2}^5 = \overline{3}$ donc $\overline{A_n''}$ n'est pas un carré de $\mathbb{Z}_{/9\mathbb{Z}}$, A_n'' n'est pas un carré de $\mathbb{N}$ et A_n n'est pas un carré de $\mathbb{N}$.

On a ainsi examiné tous les cas : A_n n'est jamais un carré.

(F) Groupes

Ex. 24

Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 12 du groupe $\mathfrak{S}_7$.

> Tout élément σ de $\mathfrak{S}_7$ se décompose de manière unique, à l'ordre près des termes, en produit de cycles disjoints donc permutables :
>
> $$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k = \prod_{i=1}^{k} c_i .$$
>
> L'ordre ℓ_i d'un cycle c_i est sa longueur $\ell(c_i)$.

Pour $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k \in \mathfrak{S}_7$, l'ordre de σ est le plus petit entier $p \geqslant 1$ tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire tel que $\forall i \in [\![1, k]\!], c_i^p = \mathrm{Id}$ soit encore $\forall i \in [\![1, k]\!], \ell(c_i)$ divise p.

En conséquence, l'ordre p de σ est le PPCM des $\ell(c_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, et le problème sa ramène à la détermination des :

$$\sigma = \prod_{i=1}^{k} c_i \in \mathfrak{S}_7 \text{ tels que } \ell(c_1) \vee \ell(c_2) \vee \cdots \vee \ell(c_k) = 12. \tag{1}$$

D'autre part, on sait que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], 1 \leqslant \ell(c_i) \leqslant 7 \tag{2}$$

et
$$\sum_{i=1}^{k} \ell(c_i) = 7 \tag{3}$$

Les diviseurs de 12, étant 1, 2, 3, 4 et 6, la condition (1) nécessite $4 \in \left\{ \ell\left(c_i\right), 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$, sinon on aurait $\ell(c_1) \vee \cdots \vee \ell(c_k) \leqslant 6$, puis avec la condition (3), $6 \notin \left\{ \ell\left(c_i\right), 1 \leqslant i \leqslant k\right\}$.

Il est maintenant immédiat que la seule solution est $k = 2$, $\ell(c_1) = 3$, $\ell(c_2) = 4$.

> Rappelons que si $a_1, \ldots, a_n$ sont n éléments donnés, distincts, le nombre de cycles de support $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est $(n-1)!$.

Le nombre de partitions de $[\![1, 7]\!]$ en deux parties de 3 et 4 éléments est $\mathrm{C}_7^3 = \mathrm{C}_7^4 = 35$.

Pour une partition donnée $\{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$, le nombre de cycles de support $\{a_1, a_2, a_3\}$ est $2!$ et le nombre de cycles de support $\{a_4, a_5, a_6, a_7\}$ est $3!$.

Le nombre d'éléments d'ordre 12 dans $\mathfrak{S}_7$ est donc :

$$2 \times 6 \times 35 = 420.$$

Ex. 25

Soit G un groupe abélien d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers distincts. Montrer que G est monogène.

> Nous notons e l'élément neutre de G.
> La question revient à montrer que G contient au moins un élément d'ordre pq. Or on sait que l'ordre de tout élément x de $G \setminus \{e\}$ est un diviseur de l'ordre de G, nous sommes donc amenés à montrer qu'il est impossible que tous les éléments soient d'ordre p ou q.

- Supposons que tous les éléments de $G \setminus \{e\}$ soient d'ordre p.

Étant donné $a \in G \setminus \{e\}$, le sous-groupe $\mathrm{gr}(a)$ engendré par a est d'ordre p et plus précisément on a :

$$\mathrm{gr}(a) = \{e, a, \ldots, a^{p-1}\}.$$

Puisque $\mathrm{Card}\left(\mathrm{gr}(a)\right) < \mathrm{Card}\, G$, il existe $b \in G \setminus \mathrm{gr}(a)$. Considérons alors le sous-groupe $\mathrm{gr}(a, b)$ engendré par a et b. Comme G est commutatif et a, b d'ordre p, on a :

$$\mathrm{gr}(a, b) = \left\{a^i b^j \,/\, 0 \leqslant i \leqslant p-1, 0 \leqslant j \leqslant p-1\right\}$$

et donc $\mathrm{Card}\,\mathrm{gr}(a, b) \leqslant p^2$.

Dans le but de démontrer que les $a^i b^j$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $0 \leqslant j \leqslant p-1$, sont deux à deux distincts, supposons que $a^i b^j = a^k b^\ell$ avec i, j, k, ℓ dans $[\![0, p-1]\!]$. On obtient alors $a^{i-k} = b^{\ell-j}$.

Dans ce cas, si $k \neq i$ on a $a^{i-k} \neq e$ donc $b^{\ell-j} = a^{i-k}$ est d'ordre p, et avec :

$$\mathrm{gr}\left(b^{\ell-j}\right) = \mathrm{gr}\left(a^{i-k}\right) \subset \mathrm{gr}(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}\left(a^{i-k}\right) = \mathrm{gr}\left(b^{\ell-j}\right) \subset \mathrm{gr}(b),$$

l'égalité des cardinaux de ces quatre sous-groupes donne $\mathrm{gr}\left(a^{i-k}\right) = \mathrm{gr}\left(b^{\ell-j}\right) = \mathrm{gr}(a) = \mathrm{gr}(b)$ d'où aussi $b \in \mathrm{gr}(a)$ ce qui est contraire au choix de b.

On en déduit $k = i$, donc $\ell = j$ puis en contraposant : $(k, \ell) \neq (i, j) \Rightarrow a^i b^j \neq a^k b^\ell$.

Finalement, il en résulte $\mathrm{Card}\,\mathrm{gr}(a, b) = p^2$ donc p^2 divise pq ce qui est à rejeter puisque, par hypothèse, $p^2 \wedge pq = p$.

On déduit de ce premier point qu'il n'est pas possible que tous les éléments de $G \setminus \{e\}$ soient de même ordre p (ou q).

- Supposons maintenant que tous les éléments de $G \setminus \{e\}$ soient d'ordre p ou q. D'après ce qui précède, il existe a d'ordre p et b d'ordre q. On a alors $a^p = e$ et $a^q \neq e$ (sinon p diviserait q) et de même $b^q = e$ et $b^p \neq e$. Considérons l'élément $c = ab$, on remarque en premier lieu que $c \neq e$, en effet $c = e$ donne $b = a^{-1}$ et donc $p = q$ puisque $\mathrm{gr}\left(a^{-1}\right) = \mathrm{gr}(a)$, donc c est, par hypothèse,

d'ordre p ou q. Si c est d'ordre p, on a $c^p = a^p b^p = e$, or $a^p = e$, donc $b^p = e$ ce qui est exclu. De même, si c est d'ordre q, on obtient $c^q = a^q b^q = e$, donc $a^q = e$ ce qui est également exclu.

Dans tous les cas, on arrive à une impossibilité, l'hypothèse de départ est donc à rejeter et il existe au moins un élément de $G \setminus \{e\}$ qui est d'ordre pq. Ainsi G est monogène et fini : c'est un groupe cyclique.

Ex. 26

Soit G un groupe d'ordre $2p$, avec p premier.

Montrer que G contient au moins un élément d'ordre p.

> Remarquons que la propriété est vraie pour $p = 1$ alors que, par convention, l'entier 1 n'est pas premier. En effet, dans ce cas, l'élément neutre e est d'ordre 1 avec $1 = p$.
>
> Le nombre p étant premier, on a $p \geqslant 2$ donc on s'intéresse ici à des groupes de cardinal $\geqslant 4$.
>
> Dans un groupe G de cardinal $2p$, on sait que l'ordre de tout élément $a \in G \setminus \{e\}$ est différent de 1 et divise $2p$. Donc, puisque p est premier, il y a trois possibilités pour cet ordre : 2, p ou $2p$ et lorsque $p = 2$, il n'en reste que deux.
>
> Si a est d'ordre p, le problème est résolu.
>
> Si a est d'ordre $2p$, alors a^2 est d'ordre p et le problème est résolu.
>
> Le seul cas gênant est donc, avec $p \geqslant 3$, celui où tout élément $a \in G \setminus \{e\}$ serait d'ordre 2.

Dans le cas évoqué ci-dessus, pour tout $a \in G \setminus \{e\}$, puisqu'il est d'ordre 2, le sous-groupe engendré par a est $\mathrm{gr}(a) = \{e, a\}$ et on a donc $a^{-1} = a$.

> Pour éliminer ce cas de figure, il nous faut arriver à une contradiction. La seule hypothèse dont on dispose étant $\mathrm{Card}\, G = 2p$ avec p premier, l'idée est donc d'exhiber un sous-groupe H de G dont la présence sera en contradiction avec le fait que p est premier et puisque, $\mathrm{Card}\, H$ divise $2p$, il suffit pour cela que H soit d'ordre 4.

Puisque $p \geqslant 3$, on a $\mathrm{Card}\, G \geqslant 6$ et il existe a, b distincts dans $G \setminus \{e\}$.

Posons $c = ab$. Dans un groupe, tout élément est simplifiable, donc $c = a$ donne $b = e$ et $c = b$ donne $a = e$ puis, en contraposant, $b \neq e$ donne $c \neq a$ et $a \neq e$ donne $c \neq b$.

Par ailleurs on a aussi $c \neq e$, en effet $c = e$ donne $b = a^{-1} = a$ ce qui est exclu par le choix de a et b.

Puisque $c \neq e$, on a $\mathrm{gr}(c) = \{e, c\}$ et donc $c^2 = e$ ce qui s'écrit $abab = e$.

On en déduit $a^2 bab^2 = ab$ soit $ba = ab$ puisque $a^2 = e$ et $b^2 = e$.

> On vient de prouver que, si $p \geqslant 3$, et si tout élément $a \in G \setminus \{e\}$ est d'ordre 2, alors G est commutatif mais ce n'est bien sûr pas la contradiction attendue.

Posons maintenant $H = \{e, a, b, c\}$ et vérifions que H est un sous-groupe de G.

On sait déjà que $a^2 = e$, $b^2 = e$, $c^2 = e$ $ab = ba = c$.

Formons :

$$ac = a(ab) = a^2 b = b, \qquad ca = (ba)a = ba^2 = b$$

$$bc = b(ba) = b^2 a = a, \qquad cb = (ab)b = ab^2 = a$$

Il apparaît donc que la loi de G induit sur H une loi interne définie par la table suivante :

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

On constate alors que H est isomorphe au groupe produit $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$, un isomorphisme étant φ tel que $\varphi(e) = (\overline{0}, \overline{0})$, $\varphi(a) = (\overline{1}, \overline{0})$, $\varphi(b) = (\overline{0}, \overline{1})$, $\varphi(c) = (\overline{1}, \overline{1})$ (a, b, c jouent des rôles symétriques) donc H est un sous-groupe de G.

> Un moyen efficace de mettre en évidence un groupe, sans vérifications laborieuses, est de reconnaître la table de Cayley d'un groupe classique à une bijection près.

Sachant que $\operatorname{Card} H$ divise $\operatorname{Card} G$, on obtient que 4 divise $2p$ donc 2 divise p, ce qui est contradictoire avec le fait que p soit premier et $p \geqslant 3$.

En conclusion, lorsque $p \geqslant 3$, il n'est pas possible de tout élément de $G \setminus \{e\}$ soit d'ordre 2 et d'après les remarques préliminaires, G contient au moins un élément d'ordre p.

G Polynômes et fractions rationnelles

Ex. 27

On cherche les polynômes réels P, non nuls, tels que $P(X^2) = P(X-1)P(X) \quad (E)$.

1) Montrer que toute racine, non nulle, d'un tel polynôme est de module 1.

2) Déterminer tous les polynômes P solutions du problème.

1)

> Penser au fait qu'un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines.

On suppose que $P \neq 0$ est solution de (E).

Alors $P(z) = 0$ (avec $z \in \mathbb{C}$) donne $P(z^2) = 0$. Donc, si z est racine de P, tout complexe z^{2^k}, $k \in \mathbb{N}$, l'est également.

Pour $|z| > 1$, la suite $\left(|z|^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc les complexes z^{2^k} sont deux à deux distincts ce qui donne une impossibilité puisque P aurait alors une infinité de racines.

De même, le cas $0 < |z| < 1$ est à rejeter en remarquant que la suite $\left(|z|^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante.

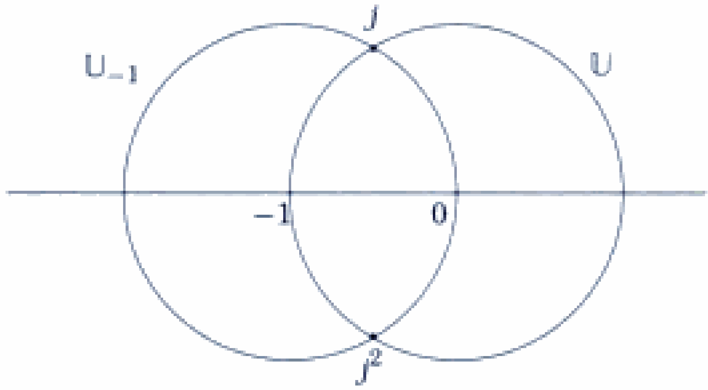
En conclusion, si z est racine de P, on a $z = 0$ ou $z \in \mathbb{U}$ (ensemble des complexes de module 1 ou cercle de centre 0 et de rayon 1).

2)

> Le 1) nous incite à préciser l'ensemble des racines de P et jusqu'ici nous avons seulement utilisé que si P est solution du problème alors $P(X)$ divise $P(X^2)$. Il est sans doute indispensable d'exploiter maintenant le fait que $P(X-1)$ est également un diviseur de $P(X^2)$.

Si $P \neq 0$ est solution de (E), on a aussi $\forall z \in \mathbb{C}$, $P\big((z+1)^2\big) = P(z)P(z+1)$ donc, compte tenu du 1), si $P(z) = 0$ on a $z + 1 = 0$ ou $|z+1|^2 = 1$, c'est-à-dire $z = -1$ ou $|z+1| = 1$, soit encore $z \in \{-1\} \cup \mathbb{U}_{-1}$ où on a posé $\mathbb{U}_{-1} = \big\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z+1| = 1\big\}$: cercle de centre -1 et de rayon 1.
Puisque $P(z) = 0$ donne aussi $z \in \{0\} \cup \mathbb{U}$, on obtient finalement que l'ensemble des racines complexes de P est inclus dans :

$$\big(\{0\} \cup \mathbb{U}\big) \cap \big(\{-1\} \cup \mathbb{U}_{-1}\big) = \big\{0, -1, j, j^2\big\}.$$



En remarquant de plus que P étant réel, j et j^2 ont le même ordre de multiplicité, il en résulte que P est nécessairement de la forme :

$$P(X) = \lambda X^p (X+1)^q (X-j)^m \big(X - j^2\big)^m \quad \text{avec } p + q + 2m = \deg P$$

| Éliminons tout de suite le problème de cette constante λ.

En égalant les coefficients dominants dans (E), il vient alors $\lambda = \lambda^2$ donc $\lambda = 1$ (car $\lambda = 0$ donnerait $P = 0$) et :

$$P(X) = X^p (X+1)^q \big(X^2 + X + 1\big)^m.$$

Pour un tel polynôme, on a $P\big(X^2\big) = X^{2p}\big(X^2+1\big)^q\big(X^4 + X^2 + 1\big)^m$ et :

$$P(X-1)P(X) = X^{p+q}(X+1)^q(X-1)^p\big(X^4 + X^2 + 1\big)^m$$

donc P vérifie (E) si et seulement si $p = q = 0$.
Finalement, les solutions du problème sont les polynômes $\big(X^2 + X + 1\big)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Ex. 28

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P\big(X^2\big) = \big(X^2 + 1\big)P(X). \qquad (E)$$

| Commençons par nous intéresser au degré des solutions éventuelles.

L'équation (E) est évidemment linéaire.
Si P est une solution non nulle, en posant $n = \deg P$, on obtient $2n = 2 + n$ donc $n = 2$ et :

$$P(X) = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, il vient $\big(X^2+1\big)P(X) = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$, donc P est solution de (E) si et seulement si :

$$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$$

c'est-à-dire $b = 0$ et $c = -a$.
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des solutions de (E) est donc la droite vectorielle dirigée par $X^2 - 1$:

$$\mathcal{S}(E) = \big\{a\big(X^2 - 1\big) \ / \ a \in \mathbb{R}\big\}.$$

Ex. 29

1) Montrer que l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R} \middle/ \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}\right\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.

2) Calculer la somme de leurs longueurs.

---

1) C'est sans difficulté ; on étudie les variations de la fonction rationnelle :

$$f \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}.$$

La fonction $f \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$ est définie, continue et dérivable sur :

$$\mathcal{D} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, 2\right[\cup \cdots \cup \left]69, 70\right[\cup \left]70, +\infty\right[.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{(x-k)^2}$$

donc f induit un homéomorphisme décroissant de chaque intervalle I_k, $0 \leqslant k \leqslant 70$, constituant $\mathcal{D}$, sur $f(I_k)$. (On a posé $I_0 = \left]-\infty, 1\right[$, $I_k = \left]k, k+1\right[$, pour $1 \leqslant k \leqslant 69$, et $I_{70} = \left]70, +\infty\right[$.)

Les variations de f sont résumées par le tableau ci-après :

x	$-\infty$	1	2 ... 69	70	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	...	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

On en déduit que, sur chaque I_k, $1 \leqslant k \leqslant 70$, il existe un unique réel a_k tel que $f(a_k) = \frac{5}{4}$ et que l'ensemble A cherché est :

$$\bigcup_{k=1}^{70} \left]k, a_k\right].$$

Il s'agit donc bien d'une réunion finie d'intervalles disjoints.

2) La somme des longueurs est :

$$S = \sum_{k=1}^{70} (a_k - k) = \left(\sum_{k=1}^{70} a_k\right) - \frac{70 \times 71}{2}.$$

Les a_k, $1 \leqslant k \leqslant 70$, sont aussi les racines du polynôme :

$$P = \frac{5}{4} \prod_{j=1}^{70} (X - j) - \sum_{j=1}^{70} j \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{70} (X - i).$$

En posant $P = \sum_{j=0}^{70} p_j X^{70-j}$ on a $\sum_{k=1}^{70} a_k = -\frac{p_1}{p_0}$ ce qui nous ramène au calcul de p_0 et p_1.

On a évidemment $p_0 = \frac{5}{4}$ et $p_1 = -\frac{5}{4}\sum_{j=1}^{70} j - \sum_{j=1}^{70} j = -\frac{9}{4}\sum_{j=1}^{70} j$ donc :

$$\sum_{k=1}^{70} a_k = \frac{4}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{70 \times 71}{2}$$

et finalement :

$$S = \left(\frac{9}{5} - 1\right) \times \frac{70 \times 71}{2} = \frac{2}{5} \times 70 \times 71 = 2 \times 14 \times 71 = 1988.$$

Ex. 30

Montrer que $a = \cos\frac{\pi}{9}$ est racine d'un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

En déduire que a est irrationnel.

> La formule donnant $\cos 3x$ sous la forme d'un polynôme en $\cos x$ doit être connue.

On sait que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ donc, pour $x = \frac{\pi}{9}$, on obtient :

$$4a^3 - 3a = \frac{1}{2} \quad \text{soit aussi} \quad 8a^3 - 6a - 1 = 0.$$

Supposons que a soit rationnel. Il existerait $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que :

$$a = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p \wedge q = 1$$

et, dans ces conditions, on aurait : $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$.
En l'écrivant $p\left(8p^2 - 6q^2\right) = q^3$, cette relation montre que p divise q^3 donc, puisque $p \wedge q = 1$, il vient $p = 1$ et $8 - 6q^2 - q^3 = 0$.
En écrivant $q^2(6 + q) = 8$, on voit que q^2 divise 8, et donc $q = 1$ ou $q = 2$.
Pour $q = 1$, on a $q^2(6 + q) = 7$ et pour $q = 2$, $q^2(6 + q) = 32$. Aucune de ces possibilités ne convient, ce qui prouve que a n'est pas rationnel.

Ex. 31

Soit P et Q deux polynômes scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

On pose $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, montrer que $R = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k)}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

> Notons tout d'abord que la notation simplificative :
>
> $$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$$
>
> se justifie par le fait que la famille $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Q est de support fini, elle représente donc bien une somme finie.
>
> Pour y voir plus clair, commençons par étudier l'opération $*$ définie sur $\mathbb{R}\left[X\right]^2$ par :
>
> $$A * B = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k B^{(k)} \text{ pour tout } (A, B) \in \mathbb{R}\left[X\right] \text{ tel que } A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k.$$
>
> On vérifie que l'application $(A, B) \mapsto A * B$ est bilinéaire, puis que $(X - \lambda) * P = P' - \lambda P$ et $\left[(X - \lambda)A\right] * P = (A * P)' - \lambda(A * P)$. Ces deux dernières propriétés laissent entrevoir la possibilité d'une démonstration par récurrence.

- Avec $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, $B = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda A + B = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\lambda\, a_k + b_k\big) X^k$ donc :

$$(\lambda A + B) * P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(\lambda\, a_k + b_k\big) P^{(k)} = \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k)} + \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k P^{(k)} = \lambda A * P + B * P.$$

On a ainsi vérifié la linéarité de $A \mapsto A * P$. Celle de $P \mapsto A * P$ provient de la linéarité des opérateurs de dérivation : $P \mapsto P^{(k)}$.

Par définition de l'opérateur $*$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(X - \lambda) * P = P' - \lambda P \quad \text{et} \quad \lambda * P = \lambda P.$$

Avec $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ on obtient $XA = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^{k+1}$ donc $(XA) * P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k P^{(k+1)} = (A * P)'$, et la linéarité de $A \mapsto A * P$ donne :

$$\big[(X - \lambda)A\big] * P = (XA) * P - \lambda A * P = (A * P)' - \lambda(A * P) = (X - \lambda) * (A * P).$$

- Montrons que la propriété est vraie lorsque Q est de degré 1 : $Q = X - \lambda$.

> Nous nous limitons à des polynômes P et Q unitaires, ce qui n'est évidemment pas restrictif en raison de la bilinéarité de l'opération $*$.

En notant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les racines distinctes de P et $m_1, \dots, m_p$ leurs ordres de mutiplicité respectifs, on a :

$$P = \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big)^{m_k}.$$

$N = m_1 + m_2 + \dots + m_p$ est le degré de P et on peut supposer que les α_i ont été indexés dans l'ordre croissant : $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(X - \lambda) * P = P' - \lambda P &= \sum_{j=1}^{p} m_j \big(X - \alpha_j\big)^{m_j - 1} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \big(X - \alpha_k\big)^{m_k} - \lambda \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big)^{m_k} \\
&= \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big)^{m_k - 1} \left(\sum_{j=1}^{p} m_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \big(X - \alpha_k\big) - \lambda \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big) \right) \\
&= R \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big)^{m_k - 1}
\end{aligned}$$

où on a posé
$$\begin{aligned}
R &= \sum_{j=1}^{p} m_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \big(X - \alpha_k\big) - \lambda \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big) \\
&= \prod_{k=1}^{p} \big(X - \alpha_k\big) \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{X - \alpha_j} - \lambda \right)
\end{aligned}$$

R est un polynôme de degré $p - 1$ si $\lambda = 0$, de degré p si $\lambda \neq 0$.

Coonsidérons alors la fonction $F\ :\ x \mapsto \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x - \alpha_j} - \lambda$ définie sur :

$$\mathcal{D} = \big]-\infty, \alpha_1\big[\cup \big]\alpha_1, \alpha_2\big[\cup \dots \cup \big]\alpha_{p-1}, \alpha_p\big[\cup \big]\alpha_p, +\infty\big[= \bigcup_{i=0}^{p} \big]\alpha_i, \alpha_{i+1}\big[$$

(avec $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{p+1} = +\infty$).

Chaque m_i est un entier $\geqslant 1$ donc $F'(x) < 0$ et F est strictement décroissante sur chaque intervalle $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $F(x) \underset{x \to \alpha_i}{\sim} \dfrac{m_i}{x - \alpha_i}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_i \\ x < \alpha_i}} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_i \\ x > \alpha_i}} F(x) = +\infty$.

Il en résulte que $F(x)$ s'annule une fois et une seule sur chacun des intervalles $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$, $i \in [\![1, p-1]\!]$, soit β_i ce point d'annulation.

> La restriction $F_{|]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ réalise une bijection décroissante de $\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[$ sur $F\left(\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[\right)$ avec $F\left(\left]\alpha_i, \alpha_{i+1}\right[\right) = \mathbb{R}$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Lorsque $\lambda = 0$ on a ainsi mis en évidence l'existence de $p-1$ racines distinctes : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ pour le polynôme R de degré $p-1$.

Donc R est scindé dans $\mathbb{R}$ et $(X - \lambda) * P = R \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k - 1}$ l'est également.

Lorsque $\lambda \neq 0$, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\lambda$, F possède un p ième point d'annulation $\beta_0 \in \left]-\infty, \alpha_1\right[$ si $\lambda < 0$ ou $\beta_p \in \left]\alpha_p, +\infty\right[$ si $\lambda > 0$ et, comme R est alors de degré p, il en résulte que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ donc que $(X - \lambda) * P$ l'est aussi.
Dans tous les cas, les variations de F sont résumées par le tableau suivant :

x	$-\infty$	α_1	α_2	$\cdots$	α_{p-1}	α_p	$+\infty$
$F(x)$	$\lambda \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$	$\cdots$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow \lambda$

La propriété est ainsi démontrée pour les polynômes Q de degré 1.

- Supposons maintenant qu'elle le soit pour $\deg Q = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

Tout polynôme scindé, unitaire, de degré n s'écrit $Q = (X - \lambda_1) Q_1$ avec Q_1 scindé, unitaire, de degré $n - 1$.
Le calcul préliminaire nous donne alors :

$$Q * P = \left[(X - \lambda_1) Q_1\right] * P = (Q_1 * P)' - \lambda_1 (Q_1 * P) = (X - \lambda_1) * \left[Q_1 * P\right]$$

et puisque le polynôme $P_1 = Q_1 * P$ est scindé dans $\mathbb{R}$ d'après l'hypothèse de récurrence, le fait que la propriété soit vraie lorsque $\deg Q = 1$ montre que $(X - \lambda_1) * (Q_1 * P)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

- On a ainsi prouvé que la propriété est héréditaire par rapport à $n = \deg Q \in \mathbb{N}^*$. Donc, puisqu'elle est vraie pour $n = 1$, elle l'est pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 32

Soit p un entier premier. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^k = 2^p + 1 \bmod \left[p^2\right]$.

> Avant de traiter cette question, faisons le parallèle avec une question très classique consistant à montrer que :
>
> $$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n.$$
>
> On remarque que C_{2n}^n est le coefficient de X^n dans le développement de $(1 + X)^{2n}$.

Mais, comme on peut aussi écrire :

$$(1+X)^{2n} = (1+X)^n \cdot (1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_n^\ell X^{k+\ell}$$

on constate que le coefficient de X^n est $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_n^{n-k}$, d'où l'égalité :

$$\mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2.$$

L'idée est donc d'exhiber un polynôme qui peut se développer de deux façons différentes en faisant apparaître les deux membres de l'égalité annoncée comme coefficients d'un même X^k.

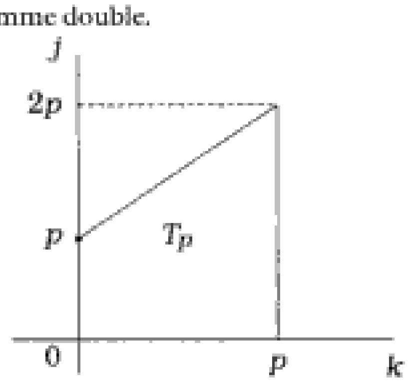
Formons $\quad \big(1+(1+X)\big)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (1+X)^k$, puis :

$$P(X) = (1+X)^p \big(1+(1+X)\big)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (1+X)^{p+k}.$$

Avec $(1+X)^{p+k} = \sum_{j=0}^{p+k} \mathrm{C}_{p+k}^j X^j$, il vient $P(X) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p+k} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^j X^j$, donc :

$$P(X) = \sum_{j=0}^{2p} X^j \sum_{k=\sup(0,j-p)}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^j.$$

Pour intervertir les sommations, on peut observer que $p+k \geqslant j$ donne $k \geqslant j-p$, donc $k \geqslant \sup(0, j-p)$ ou on peut représenter graphiquement l'ensemble de sommation relatif à la somme double.



$$T_p = \left\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \;/\; 0 \leqslant k \leqslant p,\, 0 \leqslant j \leqslant p+k\right\}$$

$$T_p = \left\{(k,j) \in \mathbb{N}^2 \;/\; 0 \leqslant j \leqslant 2p,\, \sup(0,j-p) \leqslant k \leqslant p\right\}.$$

Le coefficient de X^p dans $P(X)$ est donc :

$$a_p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^k.$$

D'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned} P(X) &= (1+X)^p (2+X)^p \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k X^k\right) \left(\sum_{j=0}^{p} \mathrm{C}_p^j 2^j X^{p-j}\right) \end{aligned}$$

d'où $\quad a_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k \left(\mathrm{C}_p^k\right)^2.$

En comparant les deux résultats obtenus, il vient :

$$\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^k = 1 + 2^p + \sum_{k=1}^{p-1} 2^k \left(\mathrm{C}_p^k \right)^2.$$

Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $\mathrm{C}_p^k = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$ donc :

$$p(p-1)\ldots(p-k+1) = k!\,\mathrm{C}_p^k.$$

Ainsi p divise $k!\,\mathrm{C}_p^k$; or p est premier avec chacun des facteurs $1, 2, \ldots, k$ donc $p \wedge k! = 1$ et le théorème de Gauss montre que p divise C_p^k.

Ceci nous donne :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \mathrm{C}_p^k \equiv 0 \bmod [p]$$

donc $\left(\mathrm{C}_p^k \right)^2 \equiv 0 \bmod \left[p^2\right]$, et finalement :

$$\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_{p+k}^k \equiv 1 + 2^p \bmod \left[p^2\right].$$

Ex. 33

Trouver les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que :

$$F\left(X^2\right) - F(X) = \frac{X}{X^2 - 1}. \qquad (E)$$

> Devant un tel problème, la première chose à remarquer est que (E) est une équation affine en F dont l'équation linéaire associée est (L) : $F\left(X^2\right) - F(X) = 0$.

Considérons l'équation linéaire (L) : $F\left(X^2\right) - F(X) = 0$.

Si $F \neq 0$ est solution de (L), en posant $n = \deg F$ on obtient $\deg F\left(X^2\right) = 2n$ donc $2n = n$ puis $n = 0$. Il en résulte $F = \dfrac{A}{B}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}\left[X\right]^2$, $A \wedge B = 1$ et $\deg A = \deg B$.

Remarquons que $A(X) \wedge B(X) = 1$ donne $A\left(X^2\right) \wedge B\left(X^2\right) = 1$. En effet, d'après le théorème de Bézout, si $A(X) \wedge B(X) = 1$, il existe $(U, V) \in \mathbb{C}\left[X\right]^2$ tels que $A(X)U(X) + B(X)V(X) = 1$ d'où on déduit $A\left(X^2\right)U\left(X^2\right) + B\left(X^2\right)V\left(X^2\right) = 1$ puis $A\left(X^2\right) \wedge B\left(X^2\right) = 1$ d'après ce même théorème de Bézout. Alors l'identité $F\left(X^2\right) = F(X)$ s'écrit :

$$\frac{A\left(X^2\right)}{B\left(X^2\right)} = \frac{A(X)}{B(X)}$$

ce qui montre que $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ et $\dfrac{A\left(X^2\right)}{B\left(X^2\right)}$ sont deux représentants irréductibles de la fraction F. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $A\left(X^2\right) = \lambda A(X)$ et $B\left(X^2\right) = \lambda B(X)$ et en considérant les degrés, il vient :

$$2 \deg A = \deg A \quad , \quad 2 \deg B = \deg B$$

d'où finalement $\deg A = \deg B = 0$ et $F = a$ (constante).

La réciproque est évidente, l'ensemble des solutions de (L) est l'ensemble des fractions constantes.

> Pour conclure, il reste à trouver une solution particulière de (E).

Si 1 est pôle de $F(X)$, 1 et -1 sont pôles de $F\left(X^2\right)$, il est donc raisonnable de chercher une solution de la forme $F(X) = \dfrac{\lambda}{X-1}$.

On obtient alors :

$$F\left(X^2\right) - F(X) = \frac{\lambda}{X^2-1} - \frac{\lambda}{X-1} = \frac{\lambda - \lambda\,(X+1)}{X^2-1} = \frac{-\lambda X}{X^2-1}.$$

Une solution est donc $F(X) = \dfrac{1}{1-X}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est décrit par les fractions :

$$F(X) = a + \frac{1}{1-X} \text{ où } a \in \mathbb{C}.$$

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Formules de Cardan

Étant donné $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, et l'équation $(E)\ :\ P(x) = 0$.

1) a) Trouver en fonction de a, b et c un réel λ tel que le coefficient du terme de degré deux du polynôme $Q(X) = P(X + \lambda)$ soit nul.

b) On note alors $Q(X) = X^3 + pX + q$. Exprimer p et q en fonction de a, b et c.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que le polynôme Q possède dans $\mathbb{C}$ une racine au moins double. Résoudre, dans ce cas, l'équation $(E')\ :\ Q(x) = 0$.

3) On suppose que la condition trouvée au 2) n'est pas vérifiée et on veut résoudre l'équation (E').

a) Montrer que tout complexe x peut se mettre sous la forme $x = u + v$ où u et v sont des complexes vérifiant la condition $3uv + p = 0$.

b) Montrer que si x est solution de (E'), u^3 et v^3 sont les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré que l'on formera.

c) En déduire les solutions de (E') en distinguanr les cas $4p^3 + 27q^2 > 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$.

d) Dans quel cas les racines sont-elles toutes réelles ? Comparer avec l'étude des variations de Q.

4) Application : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Solution

1) a) et **b)** On trouve facilement $\lambda = -\dfrac{a}{3}$, $\ p = b - \dfrac{a^2}{3}$, $\ q = c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27}$ donc :

$$Q = X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$

2) Q admet une racine double si et seulement si Q et Q' ont une racine commune.
Avec $Q' = 3X^2 + p$, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $Q(z) = 0$ et $Q'(z) = 0$, on a nécessairement :

$$z^2 = -\frac{p}{3} \quad \text{donc aussi} \quad z\left(p - \frac{p}{3}\right) + q = 0$$

ce qui donne $z = -\dfrac{3q}{2p}$. En écrivant que ce complexe est racine de Q', on obtient alors :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Réciproquement, en supposant $4p^3 + 27q^2 = 0$, le calcul précédent montre que le complexe $z = -\dfrac{3q}{2p}$ est racine de Q'. On a donc aussi $z^2 = -\dfrac{p}{3}$ d'où :

$$z^3 + pz + q = z(z^2 + p) + q = -\frac{3q}{2p}\left(p - \frac{p}{3}\right) + q = 0.$$

Ainsi z est racine commune de Q et Q' et la condition nécessaire et suffisante demandée est :

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

La somme des racines de Q étant nulle et $-\frac{3q}{2p}$ étant racine double, la racine manquante est alors $\frac{3q}{p}$.

3) a) u et v sont les racines complexes de $U^2 - xU - \frac{p}{3} = 0$.

b) Avec $x = u + v$ et $3uv + p = 0$, on obtient :

$$Q(x) = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + q.$$

Donc si $Q(x) = 0$, il vient :

$$u^3 + v^3 = -q \text{ et } u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

ce qui montre que u^3 et v^3 sont les racines de l'équation :

$$(C)\ :\ z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

c) Réciproquement, si u^3 et v^3 sont les racines de l'équation (C), on a :

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{et} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

donc si on impose de plus $uv \in \mathbb{R}$, il vient $3uv + p = 0$ (car p est réel par hypothèse) et, avec le même calcul que ci-dessus, on obtient $Q(u + v) = 0$, c'est-à-dire que $x = u + v$ est racine de Q.

Le discriminant de (C) est $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$, on envisage donc deux cas.

- $4p^3 + 27q^2 > 0$

L'équation (C) admet alors deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pour tout réel x nous notons $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel y tel que $y^3 = x$.

Posons $\alpha = \sqrt[3]{z_1}$ et $\beta = \sqrt[3]{z_2}$, les conditions $u^3 = z_1$ et $v^3 = z_2$ sont équivalentes à $u \in \{\alpha, j\alpha, j^2\alpha\}$ et $v \in \{\beta, j\beta, j^2\beta\}$. Les couples (u, v), tels que $x = u + v$ soit racine de Q, étant donnés par la condition $uv \in \mathbb{R}$, et α, β étant réels, on en déduit que les racines de Q sont $\alpha+\beta$, $j\alpha+j^2\beta$, $j^2\alpha+j\beta$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

$$j\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

$$j^2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - j\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

- $4p^3 + 27q^2 < 0$

L'équation (C) admet alors deux racines imaginaires conjuguées distinctes :

$$z_1 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

Posons $\rho = |z_1| = |z_2|$. Puisque $\operatorname{Im} z_1 > 0$, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$.

Avec $\alpha = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}}$ et $\beta = \sqrt[3]{\rho} e^{-i\frac{\theta}{3}}$, les conditions $u^3 = z_1$ et $v^3 = z_2$ sont équivalentes à :

$$u \in \{\alpha, j\alpha, j^2\alpha\} \quad \text{et} \quad v \in \{\beta, j\beta, j^2\beta\}.$$

Les couples (u, v), tels que $x = u + v$ soit racine de Q, étant donnés par la condition $uv \in \mathbb{R}$, et α, β étant imaginaires conjugués, on en déduit que les racines de Q sont $\alpha + \beta$, $j\alpha + j^2\beta$, $j^2\alpha + j\beta$, c'est-à-dire :

$$\sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} + \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{\theta}{3}} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$\sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{\rho} e^{-i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{\rho} e^{-i\left(\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

d) D'après le c) les racines de (E') sont toutes réelles si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

On retrouve ce résultat avec les variations de la fonction réelle Q. En effet, avec $Q'(x) = 3x^2 + p$, on obtient :

- si $p \leqslant 0$, Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une fois et une seule (avec la condition $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, c'est une racine simple) ;
- si $p < 0$, les variations de Q se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

avec $M = Q\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ et $m = Q\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$.

- On en déduit que Q a trois racines réelles distinctes si et seulement si $p < 0$ et $mM < 0$.

Avec $Q(x)Q(-x) = \left(q - x(x^2 + p)\right)\left(q + x(x^2 + p)\right) = q^2 - x^2\left(x^2 + p\right)^2$, on obtient :

$$mM = q^2 + \frac{p}{3}\left(p - \frac{p}{3}\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

et il en résulte que la condition précédente équivaut à $4p^3 + 27q^2 < 0$.

On a ainsi retrouvé le résultat déduit du c).

4) Avec les notations des questions précédentes on obtient :

$\lambda = 1$ et $Q(X) = P(X+1) = X^3 - 6X - 6$ donc $p = q = -6$ et $4p^3 + 27q^2 = 3 \cdot 36$.

L'équation (C) s'écrit $Z^2 - 6z + 8 = 0$, ses racines sont 2 et 4. Donc, d'après le 3)c), les solutions de (E') sont :

$$2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ j\,2^{\frac{1}{3}} + j^2\,2^{\frac{2}{3}},\ j^2\,2^{\frac{1}{3}} + j\,2^{\frac{2}{3}},$$

soit aussi :

$$2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ -2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),\ -2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} - i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),$$

et celles de (E) sont :

$$1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}},\ 1 - 2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} + i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right),\ 1 - 2^{-\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} - i\sqrt{3}\left(2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right).$$

2 Une équation polynomiale

On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X) = X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1$$

où a est un complexe donné et $\overline{a}$ son conjugué.

1) a) On pose $a = \alpha + i\beta$, $(i^2 = -1)$. Discuter, suivant la position dans le plan complexe du point A d'affixe a, le nombre de racines réelles du polynôme P et donner leurs valeurs.

b) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\dfrac{1}{\overline{z}}$ l'est aussi.

c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles P admet une racine au moins double.

d) Montrer que P admet toujours au moins une racine de module 1.

e) Montrer que, si $a \neq 0$, le module de toute racine est strictement inférieur à $1 + |a|$.

2) Dans cette question, on pose $a = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$.

a) Calculer a^2, a^3, a^4, $\overline{a}$, $\overline{a}^2$, $\overline{a}^3$, $\overline{a}^4$, ($\overline{a}^2$ signifie le carré de $\overline{a}$) et les exprimer sous la forme $p + qa$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

b) Diviser $P(X^2)$ par $P(X)$ (division euclidienne).

En déduire que si λ complexe est racine de P, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$ le sont aussi.

En déduire enfin les valeurs de λ, μ, ν.

c) Montrer que la suite des restes des divisions euclidiennes, par $P(X)$, des polynômes X^{2^n}, $n \in \mathbb{N}$, est périodique.

3) Chercher tous les polynômes Q du troisième degré, à coefficients réels ou complexes tels que $Q(X^2)$ soit divisible par $Q(X)$.

Solution

1) a) Dans ce genre de situation, il est bon de commencer par rechercher des conditions nécessaires.

b) Si z est racine réelle de P, on a $z^3 + az^2 - \overline{a}z - 1 = 0$ et $z^3 + \overline{a}z^2 - az - 1 = 0$ donc, en retranchant membre à membre, $(a - \overline{a})(z^2 + z) = 0$. On envisage donc deux cas : $a \in \mathbb{R}$ et $a \notin \mathbb{R}$.

- Pour $a \in \mathbb{R}$, on obtient $P(X) = (X - 1)\left(X^2 + (1 + a)X + 1\right)$.

Le discriminant du trinôme $X^2 + (1 + a)X + 1$ est $\Delta = (1 + a)^2 - 4 = (a + 3)(a - 1)$ donc,

– si $-3 < a < 1$, P a une seule racine réelle égale à 1 ;

– si $a < -3$ ou $a > 1$, P a trois racines réelles ;

– si $a = -3$ ou $a = 1$, P a deux racines réelles dont une double.

- Pour $a \notin \mathbb{R}$, si z est racine réelle de P, on a $z^2 + z = 0$ donc $z = 0$ ou $z = -1$.

Il est clair que 0 n'est jamais racine de P et -1 est racine si et seulement si $a + \overline{a} = 2$ c'est-à-dire $\alpha = 1$.

c) On note $\overline{P}(X) = X^3 + \overline{a}X^2 - aX - 1$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\dfrac{1}{\overline{z}^3}\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

0 n'étant pas racine de P, il en résulte que $z \in \mathbb{C}$ est racine si et seulement si $\dfrac{1}{\overline{z}}$ est également racine.

d) On remarque que $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$ équivaut à $|z| = 1$.

> D'après la question précédente, la connaissance d'une racine z donne celle d'une autre racine sauf dans le cas où $|z| = 1$. Il faut cependant prendre garde au fait que l'on ne sait rien de ce qui concerne les ordres respectifs de ces deux racines.

Supposons que z, de module différent de 1, soit racine double de P. Posons $\rho = |z|$ et $z = \rho\, e^{i\theta}$. Alors $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{\rho}e^{i\theta}$ est également racine avec $z \neq \dfrac{1}{\overline{z}}$ et, en écrivant que le produit des racines de P est égal à 1, il vient $\rho\, e^{3i\theta} = 1$ donc $\rho = 1$, ce qui est contradictoire.

En conséquence, si z est racine double de P, on a nécessairement $|z| = 1$ donc $z = e^{i\theta}$ et, toujours avec le produit des racines, on voit qu'une seconde racine est $e^{-2i\theta}$. En considérant la somme des racines, il vient alors $a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$.

Réciproquement, s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$, on vérifie facilement que :

$$P = \left(X - e^{i\theta}\right)^2\left(X - e^{-2i\theta}\right).$$

Finalement, P admet une racine au moins double si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = -2e^{i\theta} - e^{-2i\theta}.$$

e) Si $z_1 \in \mathbb{C}$ de module $\neq 1$ est racine de P, alors $z_2 = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$ est également racine et P s'écrit :

$$P = (X - z_1)\left(X - \frac{1}{\overline{z_1}}\right)(X - z_3).$$

D'après le c), z_1 et z_2 sont racines simples donc $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$.

Puisque $|z_3| \neq 1$ donne $\dfrac{1}{\overline{z_3}} \neq z_3$ et que $z_3 \notin \{z_1, z_2\}$ donne $\dfrac{1}{\overline{z_3}} \notin \{z_1, z_2\}$, on a nécessairement $|z_3| = 1$ sinon le polynôme P de degré 3 aurait quatre racines distinctes : z_1, z_2, z_3 et $\dfrac{1}{\overline{z_3}}$.

f)

> C'est le moment de penser à utiliser la somme des racines de P

On suppose $a \neq 0$. Si P admet une racine $\rho\, e^{i\theta}$ de module $\rho \neq 1$, alors les racines sont $\rho\, e^{i\theta}$, $\dfrac{1}{\rho}\, e^{i\theta}$ et $e^{-2i\theta}$. (Voir le c).)

En écrivant que la somme des racines de P est égale à $-a$, il vient donc :

$$\rho\, e^{i\theta} + \frac{1}{\rho}\, e^{i\theta} = -e^{-2i\theta} - a \quad \text{puis} \quad \rho + \frac{1}{\rho} \leqslant 1 + |a| \quad \text{et enfin} \quad \rho < \rho + \frac{1}{\rho} \leqslant 1 + |a|.$$

2) Dans cette question, $a = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}$.

a)
$$\begin{aligned}
a^2 &= \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} &&= a - 2\\
a^3 &= \frac{-5 - i\sqrt{7}}{2} &&= -a - 2\\
a^4 &= a^2 - 4a + 4 &&= -3a + 2\\
\overline{a} &= \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} &&= 1 - a\\
\overline{a}^2 &= \overline{a} - 2 &&= -1 - a\\
\overline{a}^3 &= -\overline{a} - 2 &&= a - 3\\
\overline{a}^4 &= -3\overline{a} + 2 &&= 3a - 1
\end{aligned}$$

b) D'après a), on obtient :

$$P(X) = X^3 + aX^2 + (a-1)X - 1 \;\;,\;\; P\left(X^2\right) = X^6 + aX^4 + (a-1)X^2 - 1$$

et la division donne :

$$P\left(X^2\right) = P(X)\left(X^3 - aX^2 + (a-1)X + 1\right).$$

On en déduit que $P(\lambda) = 0$ implique $P(\lambda^2) = 0$ et $P(\lambda^4) = 0$.

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\lambda = \lambda^2 \iff \lambda \in \{0, 1\}, \lambda^2 = \lambda^4 \iff \lambda \in \{0, 1, -1\}, \text{et } \lambda = \lambda^4 \iff \lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}.$$

Donc, en remarquant que pour la valeur proposée de a aucun des cinq nombres $0, 1, -1, j, j^2$ n'est racine de P, si λ est une racine quelconque de P alors $\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ en sont les trois racines distinctes.

En écrivant que le produit des racines est égal à 1, il vient maintenant $\lambda^7 = 1$ donc :

$$\lambda \in \left\{e^{\frac{2ik\pi}{7}} \;/\; 1 \leqslant k \leqslant 6\right\}.$$

On remarque que, pour $k \in \{1, 2, 4\}$, le triplet $\left\{\lambda, \lambda^2, \lambda^4\right\}$ est toujours :

$$\left\{e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}\right\}$$

et que, pour $k = 3$, $k = 5$, $k = 6$, on obtient toujours le triplet :

$$\left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}\right\}.$$

Il ne nous reste ainsi que deux possibilités.

Dans le premier cas, on a :

$$\operatorname{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}}\right) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$$

(par croissance de sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Or la somme des racines est égale à $-a$ de partie imaginaire négative. Donc le triplet de solutions est le second c'est-à-dire :

$$\left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}\right\} \text{ soit encore } \left\{e^{\frac{6i\pi}{7}}, -e^{\frac{5i\pi}{7}}, -e^{\frac{3i\pi}{7}}\right\}.$$

c) Deux polynômes de degré $\leqslant 2$ sont égaux si et seulement si ils prennent les mêmes valeurs pour trois complexes distincts.

Notons R_k le reste de la division de X^{2^k} par P, et fixons $\lambda = -e^{\frac{3i\pi}{7}}$.

On remarque alors que la suite $\left(\lambda^{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

L'identité de la division euclidienne de X^{2^k} par P s'écrit :

$$X^{2^k} = P(X)Q_k(X) + R_k(X) \text{ avec } \deg R_k \leqslant 2.$$

Donc, sachant que $\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ sont racines distinctes de P, on en déduit que R_k est l'unique polynôme de degré $\leqslant 2$ tel que :

$$R_k(\lambda) = \lambda^{2^k},\ R_k(\lambda^2) = \lambda^{2^{k+1}},\ R_k(\lambda^4) = \lambda^{2^{k+2}}.$$

Puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda^{2^k} = \lambda^{2^{k+3}}$ il en résulte alors $R_{k+3} = R_k$ ce qui traduit que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est également périodique de période 3.

Pour achever la question, il suffit donc de calculer R_0, R_1 et R_2.

Il est immédiat que $R_0 = X$ et $R_1 = X^2$. Pour R_2, on effectue la division :

$$X^4 = (X-a)P(X) + \left(\overline{a} + a^2\right)X^2 + \left(1 - |a|^2\right)X - a \text{ d'où } R_2 = -X^2 - X - a.$$

3) Nous nous restreignons à la recherche de polynômes unitaires c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1.

Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, notons $Z(Q)$ l'ensemble des zéros de Q et envisageons deux cas selon que $Z(Q)$ est ou n'est pas inclus dans $\left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$.

- Si $Z(Q) \not\subset \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$, il existe λ racine de Q telle que $\lambda \notin \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$ et, dans cette situation, $\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ sont trois racines distinctes de Q donc, puisque $\deg Q = 3$, on a :

$$Z(Q) = \left\{\lambda, \lambda^2, \lambda^4\right\} \text{ et } Q(X) = (X-\lambda)\left(X-\lambda^2\right)\left(X-\lambda^4\right).$$

Réciproquement, étant donné $\lambda \notin \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$, le polynôme $Q(X) = (X-\lambda)\left(X-\lambda^2\right)\left(X-\lambda^4\right)$ divise $Q\left(X^2\right)$ si et seulement si les racines de $Q(X)$ sont racines de $Q\left(X^2\right)$ donc si et seulement si $Q\left(\lambda^8\right) = 0$ c'est-à-dire $\lambda^8 - \lambda = 0$ ou $\lambda^8 - \lambda^2 = 0$ ou $\lambda^8 - \lambda^4 = 0$.

– Compte tenu de $\lambda \notin \{0, 1\}$, $\lambda^8 - \lambda = 0$ donne $\lambda \in \left\{e^{\frac{2ik\pi}{7}} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant 6\right\}$ et le calcul du 2)b) montre que les solutions correspondantes sont :

$$X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1 \text{ et son conjugué } X^3 + \overline{a}X^2 - aX - 1 \text{ avec } a = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}.$$

– Compte tenu de $\lambda \notin \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$, $\lambda^8 - \lambda^2 = 0$ donne $\lambda = -j$ ou $\lambda = -j^2$ d'où les solutions :

$$X^3 - j^2X^2 - j^2X + j \text{ et son conjugué } X^3 - jX^2 - jX + j^2.$$

– Compte tenu de $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$, $\lambda^8 - \lambda^4 = 0$ donne $\lambda = i$ ou $\lambda = -i$ d'où les solutions :

$$X^3 - iX^2 - X + i \text{ et son conjugué } X^3 + iX^2 - X - i.$$

- Si $Z(Q) \subset \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$, remarquons d'abord que si -1 est racine de Q alors $1 = (-1)^2$ l'est également et Q est divisible par $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. De même, si j (resp. j^2) est racine de Q alors j^2 (resp. $j = j^4$) l'est également et Q est divisible par $X^2 + X + 1 = (X-j)\left(X-j^2\right)$.

– Premier cas : j ou j^2 est racine de Q alors -1 ne l'est pas, sinon on aurait $\deg Q \geqslant 4$, et les possibilités sont :

$$X(X-j)\left(X-j^2\right),\ (X-1)(X-j)\left(X-j^2\right),\ (X-j)^2\left(X-j^2\right),\ (X-j)\left(X-j^2\right)^2.$$

Avec ces expressions, il est facile de vérifier que $Q(X)$ divise $Q(X^2)$ dans les deux premiers cas seulement. D'où les deux solutions :

$$X^3 + X^2 + X \text{ et } X^3 - 1.$$

– Deuxième cas : -1 est racine de Q, alors ni j ni j^2 ne le sont et les possibilités sont :

$$X(X^2 - 1),\ (X - 1)(X^2 - 1).$$

Les deux conviennent, d'où les solutions :

$$X^3 - X \text{ et } X^3 - X^2 - X + 1.$$

– Troisième cas : aucun des trois nombres -1, j, j^2 n'est racine de Q. Les possibilités sont alors :

$$X^3,\ X^2(X-1),\ X(X-1)^2,\ (X-1)^3.$$

Les quatre conviennent, d'où les solutions :

$$X^3,\ X^3 - X^2,\ X^3 - 2X^2 + X \text{ et } X^3 - 3X^2 + 3X - 1.$$

- En conclusion, nous avons trouvé 14 polynômes unitaires Q de degré 3 tels que $Q(X)$ divise $Q(X^2)$. En voici la liste :

$$Q_1(X) = X^3 + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}X^2 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}X - 1,$$

$$Q_1(X^2) = Q_1(X)\left(X^3 - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}X^2 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}X + 1\right);$$

$$Q_2(X) = X^3 + \frac{1-i\sqrt{7}}{2}X^2 - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}X - 1,$$

$$Q_2(X^2) = Q_2(X)\left(X^3 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}X^2 - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}X + 1\right);$$

$$Q_3(X) = X^3 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}X^2 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}X + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$Q_3(X^2) = Q_3(X)\left(X^3 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}X^2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X + 1\right);$$

$$Q_4(X) = X^3 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X^2 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$Q_4(X^2) = Q_4(X)\left(X^3 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}X^2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}X + 1\right);$$

$Q_5(X) = X^3 - iX^2 - X + i,$ $\quad Q_5(X^2) = Q_5(X)(X^3 + iX^2 - iX + 1)$;

$Q_6(X) = X^3 + iX^2 - X - i,$ $\quad Q_6(X^2) = Q_6(X)(X^3 - iX^2 + iX + 1)$;

$Q_7(X) = X^3 + X^2 + X,$ $\quad Q_7(X^2) = Q_7(X)(X^3 - X^2 + X)$;

$Q_8(X) = X^3 - 1,$ $\quad Q_8(X^2) = Q_8(X)(X^3 + 1)$;

$Q_9(X) = X^3 - X,$ $\quad Q_9(X^2) = Q_9(X)(X^3 + X)$;

$Q_{10}(X) = X^3 - X^2 - X + 1,$ $\quad Q_{10}(X^2) = Q_{10}(X)(X^3 + X^2 + X + 1)$;

$Q_{11}(X) = X^3,$ $\quad Q_{11}(X^2) = Q_{11}(X)X^3$;

$Q_{12}(X) = X^3 - X^2,$ $\quad Q_{12}(X^2) = Q_{12}(X)(X^3 + X^2)$;

$Q_{13}(X) = X^3 - 2X^2 + X,$ $\quad Q_{13}(X^2) = Q_{13}(X)(X^3 + 2X^2 + X)$;

$Q_{14}(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1,$ $\quad Q_{14}(X^2) = Q_{14}(X)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$.

3 Endomorphismes de $SL_2(\mathbb{Z})$

1) Soit G un groupe possédant un système fini de générateurs, f un morphisme surjectif de G dans G, H un groupe fini et g un morphisme de G dans H. On veut montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

a) Montrer que l'ensemble des morphismes de G dans H est fini.

b) Soit $a \in \operatorname{Ker} f$. Montrer l'existence de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de G telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(b_n) = a.$$

c) On pose $g_n = g \circ f^n$. Montrer que pour $m > n$, $g_m(b_n) = \mathbb{1}_H$ où $\mathbb{1}_H$ est le neutre de H.

d) Montrer que si $a \notin \operatorname{Ker} g$ alors $g_m \neq g_n$ pour $m > n$. Conclure.

2) *Application*

a) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Montrer que, pour tout $\Gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \{I_2\}$, on peut trouver un groupe fini H et un morphisme g de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans H tels que $g(\Gamma)$ n'est pas l'élément neutre de H.

c) Montrer que tout endomorphisme surjectif de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est bijectif.

Solution

1) a) Soit $a_1, \dots, a_p$ les générateurs de G :

$$G = \operatorname{gr}(a_1, a_2, \dots, a_p) = \left\{ a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \cdots a_{i_q}^{k_q} \,/\, q \in \mathbb{N}^*, i_k \in [\![1, p]\!], k_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Un morphisme g de G dans H est entièrement défini par la famille $(g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_p))$ qui est élément de H^p. Il y a donc au plus $(\operatorname{Card} H)^p$ possibilités pour g.

b) f étant surjectif, il en est de même pour chaque f^n ce qui assure l'existence de $b_n \in G$ tel que $f^n(b_n) = a$.

> On remarque que le fait que a soit dans $\operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $f(a) = \mathbb{1}_G$ n'intervient pas dans cette justification.

c) Pour $m > n$, on a :

$$g_m(b_n) = g \circ f^m(b_n) = g \circ f^{m-n} \circ f^n(b_n) = g \circ f^{m-n}(a).$$

Or $a \in \operatorname{Ker} f$ donne $f(a) = \mathbb{1}_G$ et, puisque f est un endomorphisme de G, il vient $f(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_G$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_G$ (le cas où $k = 0$ provient de $f^0 = \mathrm{Id}_G$) et, avec $m - n \geqslant 1$, on obtient :

$$f^{m-n}(a) = f^{m-n-1}(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_G.$$

Enfin, g étant un morphisme du groupe G dans le groupe H, on a :

$$g(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H \quad \text{donc} \quad g_m(b_n) = g(f^{m-n}(a)) = g(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H.$$

d) En supposant $a \notin \operatorname{Ker} g$, on a $g_n(b_n) = g(f^n(b_n)) = g(a) \neq \mathbb{1}_H$. Donc, de $g_m(b_n) = \mathbb{1}_H$ (pour $m > n$), on déduit $g_m \neq g_n$.

Ceci nous donne que les g_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts, ce qui est en contradiction avec le a). On en déduit $a \in \operatorname{Ker} g$ et on a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

2) a) Notons G le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

G contient toutes les puissances entières de A et B c'est-à-dire toutes les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{Z}$$

donc aussi les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+xy & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1+xy \end{pmatrix};$$

en particulier $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiennent à G.

En conséquence, G contient aussi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que son inverse $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et toutes les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit maintenant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: on a $ad - bc = 1$ donc $a \wedge b = 1$.

Supposons $|b| > 1$, l'algorithme d'Euclide nous donne une famille $(r_1, \ldots, r_p)$ d'entiers non nuls tels que :

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 - r_1 \ , \quad 0 \leqslant -r_1 < |b| \\
b &= r_1 q_2 - r_2 \ , \quad 0 \leqslant -r_2 < -r_1 \\
&\ldots\ldots \\
r_k &= r_{k+1} q_{k+2} - r_{k+2} \ , \quad 0 \leqslant -r_{k+2} < -r_{k+1} \\
r_{p-2} &= r_{p-1} q_p + 1 \ , \quad -r_p = 1
\end{aligned}$$

et matriciellement on obtient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & r_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_1 = d, \quad d_1 = cr_1 + dd_1$$

$$\begin{pmatrix} b & r_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$\ldots\ldots\ldots$

$$\begin{pmatrix} r_k & r_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{k+1} & r_{k+2} \\ c_{k+2} & d_{k+2} \end{pmatrix}$$

$\ldots\ldots\ldots$

$$\begin{pmatrix} r_{p-2} & r_{p-1} \\ c_{p-1} & d_{p-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{p-1} & 1 \\ c_p & d_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{p-1} & 1 \\ c_p & d_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & r_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{p+1} & d_{p+1} \end{pmatrix}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ étant toutes dans $SL_2(\mathbb{Z})$, il en est de même pour :

$$\begin{pmatrix} b & r_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_{p-1} & 1 \\ c_p & d_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{p+1} & d_{p+1} \end{pmatrix}$$

d'où $d_{p+1} = 1$, ce qui montre que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & r_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{p+1} & d_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{p+1} & 1 \end{pmatrix}$$

appartient à G et donc :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{p+1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{p-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_p & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à G.

Pour $b = 1$, on a $c = ad - 1$ donc $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ad-1 & d \end{pmatrix}$ alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ d & 1-ad \end{pmatrix} \in G,$$

donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ d & 1-ad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Pour $b = -1$, on a $c = 1 - ad$ donc $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1-ad & d \end{pmatrix}$ alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -d & 1-ad \end{pmatrix} \in G,$$

donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -d & 1-ad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Enfin, pour $b = 0$, on a $ad = 1$, donc $a = d = \pm 1$.

Si $a = d = 1$, on sait que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ appartient à G.

Si $a = d = -1$, on a $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$, donc :

$$M\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui montre que M appartient à G.

Finalement, on a démontré que $SL_2(\mathbb{Z}) \subset G$ et donc $SL_2(\mathbb{Z}) = G$ soit encore que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

> $SL_2(\mathbb{Z})$ est donc, comme dans le 1), un groupe admettant un système fini de générateurs.

b) Étant donné p, entier naturel premier, $K = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ est un corps et nous considérons le groupe $H = GL_2(K)$ qui est fini puisque $\mathcal{M}_2(K)$ est fini de cardinal p^4.

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{x}$ la classe de x modulo p. Il est clair que l'application :

$$g\ :\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to H,\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} \\ \overline{z} & \overline{t} \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur H.

Pour $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donnée dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec $\Gamma \neq I_2$, fixons p tel que :

$$p > \max\left\{2, |a|, |b|, |c|, |d|\right\}.$$

On vérifie alors que $g(\Gamma) \neq \mathbb{1}_H = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$.

En effet :

- si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, puisque $|b| < p$ et $|c| < p$, on a $\overline{b} \neq \overline{0}$ ou $\overline{c} \neq \overline{0}$ donc $g(\Gamma) \neq \mathbb{1}_H$;
- si $b = c = 0$ alors, puisque $\Gamma \neq I_2$, on a $a = d = -1$ donc $\overline{a} = \overline{d} = \overline{p-1}$ et $p > 2$ donne $\overline{p-1} \neq \overline{1}$, donc $g(\Gamma) \neq \mathbb{1}_H$.

c) Soit f un endomorphisme surjectif de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Pour $\Gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \left\{I_2\right\}$, il existe, d'après la question précédente, H groupe fini et g morphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans H tels que $g(\Gamma) \neq \mathbb{1}_H$ donc $\Gamma \notin \operatorname{Ker} g$.

Or, d'après le 1), on a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. En conséquence, $\Gamma \notin \operatorname{Ker} f$ et on a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} f = \left\{I_2\right\}$, c'est-à-dire que f est injectif.

Finalement, f est bijectif et il s'agit d'un automorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

CHAPITRE 2

Algèbre linéaire
Réduction

Sujets d'oraux

A Déterminants

Ex. 1

Soit $(a, b, c, d) \in K^4$; calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

> Il y a ici plusieurs démarches possibles.
>
> ▪ Par exemple, faire intervenir le déterminant de Vandermonde attaché aux quatre scalaires a, b, c, d (*cf. Précis d'Algèbre et Géométrie, MPSI*, Bréal, chapitre 14, exercice 14).
>
> ▪ Ou bien en utilisant les propriétés des opérations élémentaires sur les déterminants : c'est cette démarche qui est développée ici.

On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3, \quad C_4 \leftarrow \alpha_1 C1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 + \alpha_3 a^2 + \alpha_2 a + \alpha_1 \\ 1 & b & b^2 & b^4 + \alpha_3 b^2 + \alpha_2 b + \alpha_1 \\ 1 & c & c^2 & c^4 + \alpha_3 c^2 + \alpha_2 c + \alpha_1 \\ 1 & d & d^2 & d^4 + \alpha_3 d^2 + \alpha_2 d + \alpha_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \widetilde{P}(a) \\ 1 & b & b^2 & \widetilde{P}(b) \\ 1 & c & c^2 & \widetilde{P}(c) \\ 1 & d & d^2 & \widetilde{P}(d) \end{vmatrix}$$

où $\widetilde{P}$ est la fonction polynôme associée au polynôme P :

$$P(X) = X^4 + \alpha_3 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_1 .$$

Ainsi, pour tout polynôme P unitaire que degré 4, dont le coefficient de X^3 est nul, on obtient le résultat précédent.

> Il s'agit à présent de choisir P.
>
> Pour une recherche de polynôme «intéressant» , il peut être fructueux d'étudier les relations simples entre coefficients et racines d'un polynôme. En effet, le coefficient du terme de degré 3 est nul si et seulement si la somme des racines est nulle.

Le polynôme $P(X + a + b + c)(X - a)(X - b)(X - c)$ est unitaire de degré 4, le coefficient de X^3 est nul donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & \widetilde{P}(d) \end{vmatrix} = \widetilde{P}(d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a + b + c + d)(d - a)(d - b)(d - c)(c - a)(b - a).$$

Ex. 2

$$\text{Calculer } D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & a_3 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & a_j+b_j & \\ \vdots & \vdots & a_{j+1} & \\ a_n & a_n & \underbrace{a_n}_{j^e\text{ colonne}} & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

$(a_1, \dots, a_n) \in K^n$, $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$.

$D_n = \det\left(V + b_1 e_1, V + b_2 e_2, \dots, V + b_j e_j, \dots, V + b_n e_n\right)$

$V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.

En appliquant les propriétés de linéarité du déterminant et d'alternance, on obtient :

$$\begin{aligned} D_n &= \det\left(V + b_1 e_1, V + b_2 e_2, \dots, V + b_j e_j, \dots, V + b_n e_n\right) \\ &= \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_j e_j, \dots, b_n e_n\right) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_{-1} e_{-1}, V, b_1 e_1 - b_n e_n\right) \end{aligned}$$

or $V = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$; en utilisant à nouveau les propriétés de linéarité et d'alternance du déterminant, on obtient :

$$\det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, \underbrace{V}_{j^e\text{ place}}, \dots, b_n e_n\right) = \sum_{j=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, \dots, b_{j-1} e_{j-1}, \underbrace{a_i e_i}_{j^e\text{ place}}, \dots, b_n e_n\right)$$

or $\det\left(e_1, e_2, \dots, \underbrace{e_i}_{j^e\text{ place}}, \dots, e_n\right) = \delta_{ij}$ (notation de Kronecker), donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \det\left(b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_{j-1} e_{j-1}, a_i e_i, \dots, b_n e_n\right) = \sum_{j=1}^{n} b_1 b_2 \cdots b_{j-1} a_j b_{j+1} \cdots b_n$$

et

$$D_n = \prod_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n} b_1 b_2 \cdots b_{j-1} a_j b_{j+1} \cdots b_n .$$

Ex. 3

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, on considère le déterminant :

$$d_n = \begin{vmatrix} \widetilde{P}(1) & \dots & \widetilde{P}(k) & \dots & \widetilde{P}(n) \\ \widetilde{P}(2) & & & & \\ \vdots & & & & \\ \widetilde{P}(\ell) & \dots & \widetilde{P}(\ell+k-1) & \dots & \widetilde{P}(\ell+n-1) \\ \widetilde{P}(n) & \dots & \underbrace{\dots}_{k^e \text{ colonne}} & \dots & \widetilde{P}(2n-1) \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ell^e \text{ ligne} \\ \\ \end{array}$$

Montrer que si $d^\circ P \leqslant n-2$ alors $d_n = 0$, $\widetilde{P}$ étant la fonction polynôme associée au polynôme P.

1) Il peut être intéressant, dans un premier temps, de mettre en évidence des familles libres de $\mathbb{C}[X]$ faisant intervenir les polynômes $P(X+k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Si $P = 0$, alors $d_n = 0$.

Soit $P \neq 0$ et $d = d^\circ P$, $0 \leqslant d \leqslant n-2$.

Les polynômes $P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}$ forment, d'après le théorème des degrés échelonnés, une famille libre de $\mathbb{C}[X]$, et, d'après le théorème et la formule de Taylor, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X+k) = \sum_{r=0}^{r=d} \frac{k^r}{r!} P^{(k)}(X).$$

Dans la base $\beta = \left(P^{(r)}(X)\right)_{r \in [\![0,d]\!]}$ de $\mathbb{C}_d[X]$, les coordonnées de $P(X+k)$ sont :

$$\left(\frac{k^r}{r!}\right)_{r \in [\![0,d]\!]}$$

et :

$$\det\nolimits_\beta \left(P(X+k)\right)_{k \in [\![1,d+1]\!]} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \frac{1}{1!} & \frac{2}{1!} & & \frac{(d+1)}{1!} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\ell!} & & & \vdots \\ \frac{1}{d!} & \frac{2^d}{d!} & & \frac{(d+1)^d}{d!} \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'un déterminant d'ordre $(d+1)$.

$$\forall k \in [\![1, d+1]\!],\ P(X+k) \in \mathbb{C}_d[X].$$

or $$\det\nolimits_\beta \left(P(X+k)_{k \in [\![1,d+1]\!]}\right) = \left(\prod_{k=1}^{k=d} \frac{1}{k!}\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & d+1 \\ 1 & 2^2 & (d+1)^2 \\ \vdots & & \\ 1 & 2^d & (d+1)^d \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{k=d} \frac{1}{k!}\right) \underbrace{V(1, 2, \dots, d+1)}_{\text{déterminant de Vandermonde } \neq 0}$$

$$\neq 0$$

La famille de polynômes de $\mathbb{C}_d[X]$, $\left(P(X+k)\right)_{k \in [\![1,d+1]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{C}_d[X]$.

Une autre démarche est adoptée dans le *Précis d'Algèbre et Géométrie, MP*, Bréal, chapitre 3, exercice 9.

2) Par hypothèse : $0 \leqslant d \leqslant n-2 \iff 1 \leqslant d+1 \leqslant n-1$.

Utilisons la base $\left(P(X+k)\right)_{k\in[\![1,d+1]\!]}$ de $\mathbb{C}_d[X]$, soit le polynôme $P(X+n) \in \mathbb{C}_d[X]$:

$$\exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1} \,/\, P(X+n) = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k P(X+k)$$

et donc, pour tout x complexe et, plus particulièrement, pour tout entier naturel x compris entre 0 et $n-1$:

$$\widetilde{P}(x+n) = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k \widetilde{P}(x+k)$$

on obtient :

$$C_n = \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k C_k\,.$$

La dernière colonne de d_n est combinaison linéaire des $d+1$ premières colonnes de d_n $(1 \leqslant d+1 \leqslant n-1)$.

Et par suite, $d_n = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à $n-2$.

Remarque. Et c'est ici particulièrement qu'intervient :

$$1 \leqslant d+1 \leqslant n-1.$$

En effet, C_n est combinaison linéaire *d'autres* colonnes de d_n.

Ex. 4

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \begin{vmatrix} x & x-b & \dots & x-b \\ x-a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-b \\ x-a & \dots & x-a & x \end{vmatrix}.$$

Calculer $D_n(x)$.

En retranchant à la $k^{\text{ième}}$ colonne ($k \in [\![2,n]\!]$) la 1^{re} colonne, on obtient :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & -b & -b & \dots & \dots & -b \\ x-a & a & a-b & & & a-b \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & a-b \\ \vdots & \vdots & 0 & & \ddots & \\ x-a & 0 & 0 & & & a \end{vmatrix}.$$

En développant $D_n(x)$ selon la 1^{re} colonne, on montre que $D_n(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1. Or :

$$D_n(b) = \begin{vmatrix} b & & 0 \\ & \ddots & \\ b-a & & \ddots \\ & & & b \end{vmatrix} = b^n \quad \text{et} \quad D_n(a) = \begin{vmatrix} a & & a-b \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a \end{vmatrix} = a^n$$

Connaissant la valeur d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ en $p+1$ points deux à deux distincts, une base adaptée à cette situation est formée des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à ces $p+1$ points.

- 1^er^ cas : $a \neq b$

En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à (a, b), $a \neq b$, on a :

$$D_n(x) = D_n(b)\frac{x-a}{b-a} + D_n(a)\frac{x-b}{a-b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{b^n - a^n}{b-a}x + \frac{ba^n - ab^n}{b-a}.$$

- 2^e^ cas : $a = b$

L'application $f_x \; : \; b \mapsto \begin{vmatrix} x & & x-b \\ & \ddots & \\ x-a & & \ddots \\ & & & x \end{vmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme en b, donc :

$$\lim_{b \to a} f_x(b) = f_x(a) = D_n(x).$$

Or $\forall b \neq a, f_x(b) = \left(\frac{b^n - a^n}{b-a}x + \frac{ba^n - ab^n}{b-a}\right)$, donc :

$$D_n(x) = \lim_{b \to a}\left(\frac{b^n - a^n}{b-a}x + \frac{ba^n - ab^n}{b-a}\right)$$

or :

$$b^n - a^n = (b-a)\sum_{p=1}^{n} a^{p-1}b^{n-p} \quad \text{et} \quad ba^n - ab^n = ab\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right)$$

donc $\lim\limits_{b \to a} \frac{b^n - a^n}{b-a} = na^{n-1}$ et $\lim\limits_{b \to a} \frac{ba^n - ab^n}{a-b} = -a^2(n-1)a^{n-2} = -(n-1)a^n$, par suite :

$$D_n(x) = na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$

Une autre méthode pour le calcul de $D_n(x)$, lorsque $a = b$, peut être étudiée en introduisant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $c_k(x)$ le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de $D_n(x)$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto c_k(x)$ est dérivable, donc $D_n \; : \; x \mapsto \det\left(c_1(x), c_2(x), \ldots, c_k(x), \ldots, c_n(x)\right)$ est dérivable.

Revoir, peut-être, la «formule de Leibniz», la dérivée d'une application de la forme $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire et sa généralisation.

Et on a :

$$D_n'(x) = \det\left(c_1'(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)\right) + \det\left(c_1(x), c_2'(x), c_3(x), \ldots, c_n(x)\right) + \cdots$$
$$+ \det\left(c_1(x), c_2'(x), \ldots, c_{n-1}(x), c_n'(x)\right)$$

$$\text{or } \det\left(c_1(x), \ldots, c_k'(x), c_{k+1}(x), \ldots, c_n(x)\right) = \begin{vmatrix} x & & 1 & & \\ & \ddots & 1 & & x-a \\ & & 1 & & \\ x-a & & \vdots & \ddots & \\ & & 1 & & x \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{}_{k^{\text{ième}} \text{ colonne}}$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ i \neq k,\ C_i \leftarrow C_i - (x - a)C_k$

$$\det\big(c_1(x), \dots, c'_k(x), c_{k+1}(x), \dots, c_n(x)\big) = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & & & 1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & a & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & & & & a & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 & & & a \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \underbrace{}_{k^{\text{ième}}\ \text{colonne}} & & & \end{array}\end{array} = a^{n-1}$$

donc $D'_n(x) = na^{n-1}$, et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $D_n(x) = na^{n-1} + C$, de plus $D_n(a) = a^n$ donc $C = -(n-1)a^n$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$

Ex. 5

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \neq q$. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$.
Calculer le produit $\big(\det(AB)\big)\big(\det(BA)\big)$.

> On peut d'abord remarquer que AB est une matrice carrée d'ordre p et BA une matrice carrée d'ordre q, mais ni A, ni B n'est une matrice carrée et la relation $\det(MN) = (\det M)(\det N)$ n'est vraie que si et seulement si M et N sont des matrices carrées (de même ordre bien sûr).

Supposons, par exemple, $p < q$.

$$AB \in \mathcal{M}_p(K), \quad \mathrm{rg}(AB) \leqslant \inf(p, q) \leqslant p$$

$$BA \in \mathcal{M}_q(K), \quad \mathrm{rg}(BA) \leqslant \inf(p, q) < q$$

donc l'une au moins de ces deux matrices, dans ce cas BA, a un rang strictement inférieur à son ordre et donc son déterminant est nul. Ainsi :

$$\big(\det(AB)\big)\big(\det(BA)\big) = 0.$$

(B) Diagonalisation

Ex. 6

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C}).$$

1) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Quand A est diagonalisable, trouver $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$ où D est une matrice diagonale.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

en ajoutant à la ligne 1 la ligne 2 ; puis en ajoutant à la ligne 3 la ligne 4, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

en ajoutant à la colonne 1 l'opposé de la colonne 2

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+\lambda & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}$$

puis en développant selon la 1^{re} colonne :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)^2(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-\lambda \end{vmatrix}\\ &= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)(2a-1-\lambda)\end{aligned}$$

Deux cas sont à distinguer selon les valeurs de a.

1) $2a-1 \in \{1,-1\} \iff a \in \{1,0\}$.

- (i) si $a=0$ alors $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$; deux valeurs propres doubles : 1 et -1.

Étudions $A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $\operatorname{rg}(A-I_4) = 2$; d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice $(A-I_4)$, on a $\dim \operatorname{Ker}(A-I_4) = 2$.

Étudions à présent $A+I_4$.

$$A+I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rg}(A+I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

donc $\dim \operatorname{Ker}(A+I_4) = 1$ (en appliquant à nouveau le théorème du rang, cette fois-ci, à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice $A+I_4$) et on a :

$$\operatorname{Ker}(A+I_4) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la matrice A n'est pas diagonalisable.

> Il est indispensable de connaitre les propriétés caractéristiques d'un endomorphisme diagonalisable.
> On a obtenu ici pour la valeur propre -1 :
> $$\dim \operatorname{Ker}\left(A + I_4\right) < 2$$
> l'ordre de multiplicité de -1 dans le polynôme caractéristique est 2, donc A n'est pas diagonalisable.

- (ii) si $a = 1$ alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$.

-1 est une valeur propre simple donc $\dim \operatorname{Ker}\left(A + I_4\right) = 1$.

Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\dim \operatorname{Ker}\left(A - I_4\right) = 3$, or :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \operatorname{rg}\left(A - I_4\right) = 1$$

$$\operatorname{Ker}\left(A - I_4\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

et A est diagonalisable. Si on pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

2) $2a \notin \{1, -1\} \iff a \notin \{0, 1\}$.

$2a - 1$ est alors valeur propre simple et le sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(A - (2a - 1)I_4\right)$ est une droite vectorielle.

> Remarque. A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre attaché à la valeur propre 1 est de dimension deux. En effet, 1 est la seule valeur propre multiple de A.

$$A - (2a - 1)I_4 = \begin{pmatrix} -2a + 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2a + 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -a + 1 & 1 - a \\ 0 & 0 & 1 - a & -a + 1 \end{pmatrix}$$

$\left(A - (2a - 1)I_4\right)X = 0$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (-2a + 1)x + y + z - t = 0 \\ x + (-2a + 1)y - z + t = 0 \\ (1 - a)(z + t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax - z = 0 \\ x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C} \\ x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = a\alpha \\ t = -a\alpha \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker}\left(A-(2a-1)I_4\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\a\\-a\end{pmatrix}$.

-1 est valeur propre simple et $\operatorname{Ker}\left(A+I_4\right)=\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

1 est valeur propre double et $\operatorname{Ker}\left(A-I_4\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

A est diagonalisable et on a en posant $P=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&-1&-1\\0&1&0&a\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP=\text{ diagonale }(1,1,-1,2a-1).$$

Ex. 7

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&c\\0&&&&c\\\vdots&&0&&\vdots\\0&&&&c\\\underbrace{a\quad a\quad\dots\quad a}_{n-1}&&&&b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad(n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant 3)$$

soit diagonalisable.

$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $abc\neq 0$.

Soit $A=\begin{pmatrix}0&&&&&&c\\\vdots&&&0&&&\vdots\\0&&&&&&c\\a&\dots&&a&\dots&a&b\end{pmatrix}$, $\operatorname{rg}A=2$ car $ac\neq 0$.

Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A : $\dim\operatorname{Ker}u=n-2$, donc 0 est valeur propre, la dimension de l'espace propre correspondant est $n-2$ et l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 appartient à $[\![n-2,n]\!]$.

- $\operatorname{Im}u=\operatorname{Vect}\left(e_n,\sum_{k=1}^{n-1}e_k\right)$.
- $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Vect}\left(e_1-e_2,e_1-e_3,\dots,e_1-e_{n-1}\right)$ car $c\neq 0$.

> En effet, par lecture de la matrice, C_i étant le c $^{\text{ième}}$ -vecteur colonne de A ($i\in[\![1,n]\!]$) :
>
> $$\forall i\in[\![2,n-1]\!],\ C_1-C_i=0$$

$u(e_1) - u(e_i) = 0$, c'est-à-dire $u(e_1 - e_i) = 0$, $(e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_n)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} u &= \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_i), \dots, u(e_{n-1}), u(e_n)\Big)\\
&= \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_n)\Big)\\
&= \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), bu(e_1) - au(e_n)\Big) \quad \text{car } a \neq 0\\
&= \operatorname{Vect}\left(e_n, \sum_{k=1}^{n-1} e_k\right) \quad \text{car } c \neq 0
\end{aligned}$$

Or :

$$\beta' = \Big(\underbrace{e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_{n-1},}_{\beta_2 \text{ base de } \operatorname{Ker} u} \quad \underbrace{e_n, \sum_{k=1}^{n-1} e_k}_{\beta_1 \text{ base de } \operatorname{Im} u}\Big)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$, donc :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$

et :

$$M_{\beta'}(u) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cc} & 0 & 0\\ & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots\\ & b & (n-1)a\\ & c & 0 \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} n \\ \underbrace{\hphantom{000000}}_{n-2} \quad \underbrace{\hphantom{0000}}_{2} \end{array}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} b & (n-1)a \\ c & 0 \end{pmatrix} = M_{\beta_1}(u_{|\operatorname{Im} u})$.

Le polynôme caractéristique de $u_{|\operatorname{Im} u}$ est :

$$\chi_B(X) = X^2 - bX - (n-1)ac$$

dont le discriminant Δ est $\Delta = b^2 + 4ac(n-1)$.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique de $u_{|\operatorname{Im} u}$ $X^2 - bX - ac(n-1)$ n'est pas scindé, donc $u_{|\operatorname{Im} u}$ n'est pas diagonalisable. Par suite, u n'est pas diagonalisable.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme $X^2 - bX - ac(n-1)$ est scindé, à racines simples, donc $u_{|\operatorname{Im} u}$ admet deux valeurs propres distinctes non nulles car $ac(n-1) \neq 0$.

> On pouvait remarquer plus haut que si $u_{|\operatorname{Im} u}$, donc $\operatorname{Im} u$, admet une valeur propre, alors cette valeur propre est non nulle, sinon :
>
> $$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \neq \{0\}.$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique de B admet une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = b/2$:

$$B - \frac{b}{2} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & (n-1)a \\ c & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}\left(B - \frac{b}{2} I_2\right) = 1$$

$$\dim \operatorname{Ker}\left(u-\frac{b}{2}I_2\right)=+1.$$

La dimension du sous-espace propre Ker $(u-(b/2)I_2)$ n'étant pas égal à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre, $u_{|\operatorname{Im} u}$ n'est pas diagonalisable, donc u n'est pas diagonalisable.

u est diagonalisable si et seulement si $b^2+4ac(n-1)>0$.

> En considérant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable si et seulement si $b^2+4ac(n-1) \neq 0$; sinon A est triangularisable ($(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $abc \neq 0$).

Ex. 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}_n[X]$, $A \neq 0$.

On considère $\Phi_A : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto (AP)^{(n)}$.

$(AP)^{(n)}$ est le polynôme dérivée $n^{\text{ième}}$ du polynôme A.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit diagonalisable.

On peut vérifier rapidement que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$:

- d'abord Φ_A est linéaire d'après la linéarité de la dérivation ;
- ensuite $d^\circ(AP)=d^\circ A+d^\circ P \leqslant 2n$; (avec la convention : le degré du polynôme nul est $-\infty$ et si $P=0$, $d^\circ A+d^\circ P=-\infty$), donc $d^\circ(AP)^{(n)} \leqslant 2n-n=n$, ainsi $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}_n[X]$.

> On détermine (B étant la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) $\Phi_A(X^q)$ pour tout $q \in [\![0,n]\!]$, et on a :
>
> $$d^\circ\left(AX^q\right)^{(n)} \leqslant d^\circ A+q-n \leqslant q.$$
>
> La matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc triangulaire supérieure, ce qui donne immédiatement les valeurs propres de Φ_A.

En posant $A=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d^\circ A=d \in [\![0,n]\!]$:

$$AX^q=\sum_{k=0}^{d} a_k X^{k+q} \text{ pour tout } q \in [\![0,n]\!]$$

et donc $\left(AX^q\right)^{(n)}=\sum_{k=n-q}^{d}(k+q)(k+q-1)\dots(k+q-n)a_k X^{k+q-n}$.

- Si $d<n$ alors $M_B(\Phi_A)=\begin{pmatrix} 0 & & & \times \\ & 0 & & \times \\ & & \ddots & \times \\ & 0 & \ddots & \times \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ avec $\Phi_A(X^n) \neq 0$.

0 est valeur propre de Φ_A d'ordre de multiplicité $(n+1)$, Φ_a est alors nilpotente et, bien sûr, n'est pas un automorphisme, n'est pas diagonalisable car $\Phi_A \neq 0$.

- Si $d = n$, $a_n \neq 0$, alors :

$$M_B(\Phi_A) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{pmatrix} n!a_n & & \times & & \\ 0 & (n+1)!a_n & & \times & \\ \vdots & & \ddots & & \times \\ \vdots & & & \dfrac{(n+q)!}{q!}a_n & \\ 0 & & & & \\ & & & & \dfrac{(2n)!}{n!}a_n \end{pmatrix}\right\} n+1 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \} \, q^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q^{\text{ième}} \text{ colonne}}$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(\Phi_a)$ donc Φ_A est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Φ_A admet $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes et Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $(n+1)$, donc Φ_A est diagonalisable.

> Cette condition est une condition suffisante de diagonalisabilité, les valeurs propres sont deux à deux distinctes car $a_n \neq 0$ ($d^\circ A = n = d$ et a_n est le coefficient dominant de A).

En conclusion, Φ_n est diagonalisable si et seulement si $d^\circ A = n$.

Ex. 9

Étude de l'application :

$$L_n \; : \; \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \; P \mapsto XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X).$$

1) Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

2) Déterminer, selon $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\, L_n$ et une base de $\mathrm{Im}\, L_n$.

3) Pour $n \geqslant 4$, déterminer, selon les valeurs de l'entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'existence de polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^p.$$

1) La linéarité de L_n est due à la linéarité de la dérivation et à la structure de $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$L_n(P) = (p-3)a_pX^p + Q(X) \quad \text{où } d^\circ Q < p$$

donc :

$$\begin{cases} d^\circ L_n(P) = d^\circ P & \text{si } d^\circ P \neq 3 \\ d^\circ L_n(P) < d^\circ P & \text{si } d^\circ P = 3 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $L_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

La matrice de L_n, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, est une matrice carrée d'ordre $(n+1)$ triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $(k-3)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ car $L_n(1) = -3$, $L_n(X) = -4 - 2X$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $L_n(X^k) = (k-3)X^k + (k^2 - 5k)X^{k-1}$, donc :

$$\mathrm{Sp}(L_n) = \{(k-3), k \in [\![0, n]\!]\}, \mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}(L_n) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1.$$

L_n admettant $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

2) En particulier, 0 est valeur propre de L_n si et seulement si $n \geqslant 3$ et alors c'est une valeur propre simple et $\dim \mathrm{Ker}\, L_n = 1$, d'après l'étude du degré de $L_n(P)$, si $P \in \mathrm{Ker}\, L_n$ et $P \neq 0$, alors $d^\circ P = 3$. Cherchons P unitaire et de degré 3 appartenant à $\mathrm{Ker}\, L_n$.

Soit :

$$P = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$
$$P' = 3X^2 + 2\,\alpha\, X + \beta$$
$$P'' = 6X + 2\,\alpha\,.$$

et $L_n(P) = \big(-3\,\alpha - 12 + 2\,\alpha \big)X^2 + \big(-3\,\beta - 8\,\alpha + 2\,\alpha + \beta \big)X + \big(-3\,\alpha - 4\,\beta\,\big)$.

$P \in \operatorname{Ker} L_n \iff L_n(P) = 0$ et comme $\left(1, X, X^2\right)$ est libre, il s'ensuit :

$$\left\{\begin{array}{r} -\,\alpha - 6 = 0 \\ 2\,\beta - 6\alpha = 0 \\ -3\,\gamma - 4\beta = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = -6 \\ \beta = 18 \\ \gamma = 24. \end{array}\right.$$

Si $n \geqslant 3$, $\operatorname{Ker} L_n = \mathbb{R}\left(X^3 - 6X^2 + 18X - 24\right)$.

Si $n \in [\![0, 2]\!]$, $\operatorname{Ker} L_n = \left\{0\right\}$.

En appliquant le théorème du rang à L_n pour $n \geqslant 3$:

$$\dim \mathbb{R}_n\left[X\right] = \dim \operatorname{Ker} L_n + \operatorname{rg} L_n$$

on obtient $\operatorname{rg} L_n = n$, car $\dim \mathbb{R}_n\left[X\right] = n + 1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L_n &= \operatorname{Vect}\left(L_n\left(X^k\right), k \in [\![0, n]\!]\right) \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\underbrace{1, X, X^2, -4X^3 + X^4, X^k, k \in [\![5, n]\!]}_{\text{de cardinal } n}\Big) \end{aligned}$$

donc une base de $\operatorname{Im} L_n$ est $\left(1, X, X^2, -4X^3 + X^4, X^k, k \in [\![5, n]\!]\right)$.

La matrice de Φ_A dans la base canonique est :

$$\left.\begin{pmatrix}
-3 & -4 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & -2 & -6 & 0 & & & & 0 \\
0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & 0 & & & & 0 \\
0 & & & & \ddots & & 0 & \\
\vdots & & & & & k^2 - 5k & 0 & \\
\vdots & 0 & & & & k - 3 & \ddots & \\
\vdots & & & & & & \ddots & n(n-5) \\
0 & & & & & & & n - 3
\end{pmatrix}\right\} n + 1$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{(k+1)^{\text{ième}} \text{ colonne}}$$

L_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n\left[X\right]$ (conséquence du théorème du rang) si et seulement si $0 \leqslant n \leqslant 2$.

3) $XP''(X) + (X - 4)P'(X) - 3P(X) = X^p$.

$\forall p \in [\![0, n]\!] \setminus \left\{3, 4\right\}, X^p \in \operatorname{Im} L_n$.

- Si $p = 3$, $\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$:

$$\left\{\begin{array}{ll} d^\circ L_n(P) = d^\circ P \neq 3 & \text{si } d^\circ P \neq 3 \\ d^\circ L_n(P) < d^\circ P = 3 & \text{si } d^\circ P = 3 \end{array}\right.$$

Dans tous les cas, $d^\circ L_n(P) \neq 3$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right]$, $L_n(P) \neq X^3$, donc $X^3 \notin \operatorname{Im} L_n$.

- Si $p = 4$, supposons que $X^4 \in \operatorname{Im} L_n$; comme $-4X^3 + X^4 \in \operatorname{Im} L_n$, alors :

$$X^3 = -\frac{1}{4}\left(-4X^3 + X^4\right) + \frac{1}{4}X^4 \in \operatorname{Im} L_n$$

ce qui est contraire au résultat précédent, donc $X^4 \notin \operatorname{Im} L_n$.

(i) $\forall p \in [\![0, n]\!] \setminus \{3, 4\}, \exists P_0 \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, L_n(P_0) = X^p$. Alors :

$$\left\{P \,/\, L_n(P) = X^p\right\} = \left\{P_0 + \alpha\left(X^3 - 6X^2 + 18X - 24\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

> En effet, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $L_n(P) = X^p$ si et seulement si $L_n(P) = L_n(P_0)$, ce qui est équivalent à $L_n(P - P_0) = 0$, donc :
>
> $$P - P_0 \in \operatorname{Ker} L_n.$$

(ii) $\forall p \in \{3, 4\}, \left\{P \,/\, L_n(P) = X^p\right\} = \emptyset$.

Ex. 10

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E diagonalisables et tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Montrons d'abord que f et g sont simultanément diagonalisables.

f étant diagonalisable, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$. $\quad (*)$

Comme f et g commutent, $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ est stable par g.

> En effet :
>
> $$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right), \quad \left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)\left(g(x)\right) &= f \circ g(x) - \lambda g(x) \\ &= g \circ f(x) - \lambda g(x) \\ &= g(\lambda x) - \lambda g(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $g_{|\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)}$ induit un endomorphisme de $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$, notons-le g_λ.
Or, g étant diagonalisable, il existe un polynôme scindé, à racines simples, annulateur de g donc de g_λ. Par suite, g_λ est diagonalisable.

> Par application du théorème : $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé, à racines simples, annulateur de u.

Il existe donc une base β_λ de $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ formée de vecteurs propres de g_λ donc de g, et de f car $\beta_\lambda \subset \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ et :

$$\beta = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \beta_\lambda$$

est une base de E adaptée à la décomposition $(*)$.

Cette base β de E est donc constituée de vecteurs propres de f et de g : f et g sont donc simultanément diagonalisables et, de plus, β est une base de vecteurs propres de $f \circ g$.

> En effet :
>
> $$\begin{aligned} \forall x \in \beta, \ &\exists\, \mu \in \mathrm{Sp}(g) \,/\, g(x) = \mu x \\ &\exists\, \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \,/\, f(x) = \lambda x \end{aligned}$$

donc $f \circ g(x) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda x$ et $x \neq 0$ car $x \in \beta$ donc x est un vecteur propre de $f \circ g$ pour tout $x \in \beta$. De plus, β est une base de E donc β est une base de vecteurs propres de $f \circ g$.

Par suite, $f \circ g$ est diagonalisable.

Remarque. Cet exercice a permis d'appliquer différentes propriétés caractéristiques d'un endomorphisme diagonalisable.

(i) $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right).$$

(ii) $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé, annulateur de u, à racines simples.

(iii) $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagnalisable si et seulement si il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Ex. 11

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

Montrer l'équivalence des trois assertions :

(a) u est diagonalisable ;

(b) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$;

(c) $\operatorname{Tr}(u) \neq 0$.

Remarquons d'abord que, par application du théorème du rang à $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim \operatorname{Ker} u = n - 1$.

Or, si $n = 1$, u est une homothérie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et on a bien l'équivalence des trois assertions. On peut donc supposer dans la suite que $n \geqslant 2$.

0 est donc valeur propre de u, le sous-espace propre associé étant de dimension $n - 1$.

- Si u est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$$

c'est-à-dire ici :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right) \quad \text{où } \lambda \neq 0.$$

Par considération des dimensions car :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \dim \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right) \geqslant 1.$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$ où $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, $\lambda \neq 0$, alors $u(x) = \lambda x$, et comme $\lambda \neq 0$:

$$x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \operatorname{Im} u \quad \text{donc} \quad \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right) \subset \operatorname{Im} u$$

et, par considération des dimensions :

$$\operatorname{Ker}\left(u - \lambda \operatorname{Id}_E\right) = \operatorname{Im} u.$$

Par suite :

$$E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u \quad \text{d'où} \quad (a) \Rightarrow (b).$$

- Supposons que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Soit β une base de E adaptée à cette décomposition de E en somme directe : $\beta = \{e\} \cup \beta_1$ où β_1 est une base de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e)$, ($\dim \operatorname{Im} u = 1$ car $\operatorname{rg} u = 1$).

Comme $u(e) \in \operatorname{Im} u$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}\ /\ u(e) = \lambda e$; or $\lambda \neq 0$ car, si $\lambda = 0$, alors $u(e) = 0$ et $e \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$. Comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, ce qui en contradiction avec $e \neq 0$.

Par suite :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Donc $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr}\left(M_\beta(u)\right) = \lambda \neq 0$, donc (b) $\Rightarrow$ (c).

- Supposons $\operatorname{Tr} u \neq 0$.

Soit $e \in \operatorname{Im} u$, $e \neq 0$, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e)$ car $\operatorname{rg} u = 1$. Il existe une base β de E dont le premier vecteur est e.

> Par application du théorème de la base incomplète.

$\forall x \in \beta$, $u(x) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$ donc :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} M_\beta(u) = \lambda \neq 0$.

Le polynôme caractéristique de u est donc :

$$(-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$

0 est valeur propre d'ordre $n-1$, le sous-espace propre correspondant est $\operatorname{Ker} u$ de dimension $n-1$ car $\operatorname{rg} u = 1$.

λ est valeur propre simple, donc $E = \operatorname{Ker}(u - \lambda e) \oplus \operatorname{Ker} u$, et u est diagonalisable.

Ex. 12

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

M est-elle diagonalisable ?

${}^tM = I_n - M^2$ donc $M = I_n - {}^t\left(M^2\right)$.

> *Rappel.* L'application $\varphi\ : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$ vérifie :
> $$\forall (M, N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ {}^t\left({}^tM\right) = M \text{ et } {}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$$

$$\begin{aligned} M &= I_n - \left({}^tM\right)^2 \\ &= I_n - \left(I_n - M^2\right)^2 \\ &= -M^4 + 2M^2 \end{aligned}$$

Or M est inversible, on obtient donc :

$$I_n = -M^3 + 2M.$$

Soit :

$$\begin{aligned} P &= X^3 - 2X + 1 \\ &= (X-1)\left(X^2 + X - 1\right) \\ &= (X-1)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

alors $P(M) = 0$.

P est donc un polynôme à coefficients réels, scindé, à racines simples, annulateur de M, M est donc diagonalisable.

Ex. 13

Résoudre : $\begin{cases} M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M^5 = M^2 \\ \operatorname{Tr} M = n. \end{cases}$

Soit le polynôme $X^5 - X^2 = X^2\left(X^3 - 1\right)$. C'est un polynôme annulateur de M. Or, si λ est valeur propre de M, alors λ est racine de $X^5 - X^2$ donc $\lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \left\{0, 1, j, j^2\right\}.$$

Soit $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$ dans le polynôme caractéristique, $m(\lambda) \in \mathbb{N}$ (en travaillant dans $\mathbb{C}\left[X\right]$).

> $m(\lambda) = 0 \iff \lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

Le polynôme caractéristique est de degré n, à coefficients réels, donc $m(j) = m\left(j^2\right)$ et on a :

$$m(0) + m(1) + 2m(j) = n.$$

Or $\operatorname{Tr} M = 0 \times m(0) + 1 \times m(1) + jm(j) + j^2 m\left(j^2\right)$, d'où le système :

$$\mathcal{S} \begin{cases} m(0) + m(1) + 2mj = n \\ m(1) + jm(j) + j^2 m(j) = n \\ \left(m(0), m(1), m(j)\right) \in [\![0, n]\!]^3. \end{cases}$$

> $1 + j + j^2 = 0$.

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} m(0) + m(1) + 2m(j) = n \\ m(1) - m(j) = n \\ \left(m(0), m(1), m(j)\right) \in [\![0, n]\!]^3 \end{cases} \iff \begin{cases} m(1) = n \\ m(j) = 0 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \left\{1\right\} = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$.

> *Remarque*. Le polynôme caractéristique de M est $(-1)^n(X-1)^n$.

Comme 0 n'est pas valeur propre, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\begin{cases} M^5 - M^2 = 0 \\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \iff M^3 - I_n = 0.$$

> $M^3 - I_n = 0 \Rightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'où l'équivalence précédente.

Le polynôme $X^3 - 1$ est donc un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$, annulateur de M, à racines simples, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant 1 pour unique valeur propre, M est donc semblable à I_n puis $M = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc une unique solution au système proposé, c'est I_n.

Ex. 14

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) Pour quelles valeurs de z la matrice M_z est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que pour $|z|$ assez petit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} M_z^n = 0$.

1) En tant que matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de M_z est scindé et, en général, il admet trois racines simples, ce qui est une condition suffisante pour que M_z soit diagonalisable.

Formons le polynôme caractéristique :

$$P(X) = \det\left(M_z - XI_3\right) = -X^3 + Xz + z.$$

Un complexe λ est racine double (au moins) de P si et seulement si il est racine commune de P et P'.

Pour $z = 0$, il est clair que 0 est racine triple de P.

Supposons maintenant $z \neq 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine double (au moins) de P, on a :

$$-\lambda^3 + \lambda z + z = 0 \quad \text{et} \quad 3\lambda^2 = z$$

donc :
$$\lambda^2 = \frac{z}{3} \quad \text{et} \quad \lambda\left(\lambda^2 - z\right) = z$$

soit :
$$\lambda^2 = \frac{z}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{2}{3}z\lambda = z.$$

Puisque $z \neq 0$, on en déduit $\lambda = -\frac{3}{2}$ et $z = \frac{27}{4}$.

Réciproquement, pour $z = \frac{27}{4}$ on a :

$$-X^3 + \frac{27}{4}X + \frac{27}{4} = \left(X + \frac{3}{2}\right)(3 - X),$$

donc $-\frac{3}{2}$ est racine double de P.

Ainsi M_2 admet trois valeurs propres distinctes, sauf si $z \in \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$, et dans ce cas, elle est diagonalisable.

Pour $z = 0$, on a :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est évidemment pas diagonalisable puisqu'elle est non nulle et admet la valeur propre triple 0 (M_0 est nilpotente d'indice 2).

Pour $z = \frac{27}{4}$, on a :

$$M_{\frac{27}{4}} + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et il est clair que cette matrice est de rang 2. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double $-\frac{3}{2}$ est une droite vectorielle et $M_{\frac{27}{4}}$ est non diagonalisable.

En conclusion, M_z est diagonalisable si et seulement si $z \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$.

2) Lorsque M_z est diagonalisable, en appelant λ_1, λ_2, λ_3 ses valeurs propres, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_z^n est semblable à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

donc M_z^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall i \in \{1,2,3\}$, $|\lambda_i| < 1$. En conséquence, si on détermine une condition nécessaire pour qu'il existe une valeur propre λ de module $|\lambda| \geqslant 1$, sa négation donne une condition suffisante pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_z^n = 0$.

Avec $P(\lambda) = -\lambda^3 + z(\lambda + 1)$ on obtient, quel que soit z, $P(-1) = 1$. Donc -1 n'est en aucun cas valeur propre de M_z et, pour toute valeur propre λ, on a :

$$\frac{\lambda^3}{1+\lambda} = z.$$

Supposons que λ soit une valeur propre de module $|\lambda| \geqslant 1$. On a alors :

$$|1+\lambda| \leqslant 1 + |\lambda| \leqslant 1 + |\lambda|^3 \quad \text{donc} \quad |z| = \frac{|\lambda|^3}{|1+\lambda|} \geqslant \frac{|\lambda|^3}{1+|\lambda|^3}$$

et, par croissance de la fonction homographique $\varphi : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ sur $[1, +\infty[$, il vient :

$$|z| \geqslant \varphi(1) = \frac{1}{2}.$$

En tenant compte du 1), il en résulte que, pour $0 < |z| < \frac{1}{2}$, M_z admet trois valeurs propres distinctes de modules strictement inférieurs à 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_z^n = 0$.

Pour $z = 0$, on a $M_0^n = 0$ dès que $n \geqslant 3$ d'où finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} M_z^n = 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \frac{1}{2}.$$

Ex. 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elle le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP \iff AP = PB.$$

Il s'agit ici de décomposer la matrice P à coefficients complexes sous la forme de combinaison linéaire à coefficients complexes de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe un couple unique $(Q, R) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$, $P = R + iQ$.

> En effet, $P = (p_{\ell,k})_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ $\quad p_{\ell,k} \in \mathbb{C} \quad \exists!(r_{\ell,k}, q_{\ell,k}) \in \mathbb{R}^2 \,/\, p_{\ell,k} = r_{\ell,k} + iq_{\ell,k}$.
> L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe donne le résultat en posant :
> $$R = (r_{\ell,k})_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \quad , \quad Q = (q_{\ell,k})_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant n}}$$

Ainsi :

$$A(R + iQ) = (R + iQ)B.$$

$$AR + iAQ = RB + iQB.$$

De l'unicité d'écriture algébrique d'un nombre complexe, on déduit :

$$\begin{cases} AR = RB \\ AQ = QB \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ A(R + \lambda Q) = (R + \lambda Q)B.$$

> Il s'agit maintenant de montrer qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
> $$(R + \lambda Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Or l'application :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto \det(R + \lambda Q)$$

est une fonction polynôme non nulle car $\det\big(\underbrace{R + iQ}_{=P}\big) \neq 0$ (en effet, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

> Rappel. $M \in \mathrm{GL}_n(K) \iff \det M \neq 0$.

La restriction à $\mathbb{R}$ de $\lambda \mapsto \det(R + \lambda Q)$ est donc aussi non nulle.

> Conséquence du théorème de d'Alembert.

Donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + \lambda_0 Q) \neq 0$; par suite $R + \lambda_0 Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\begin{cases} A(R + \lambda_0 Q) = (R + \lambda_0 Q)B \\ (R + \lambda_0 Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

c'est-à-dire que A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

Ex. 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + I_n = 0$.

Montrer que n est pair et que A est semblable à B avec :

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & C_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & C_p \end{pmatrix} \qquad n = 2p$$

où $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $C_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$.

> Pour montrer la parité de n, utilisons deux méthodes.

- 1re méthode

Le polynôme $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A. Soit χ le polynôme caractéristique de A, alors $d^\circ \chi = n$ et $\chi \in \mathbb{R}[X]$. Si n est impair, alors χ admet au moins une racine réelle.

C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction polynôme $\widetilde{X} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée au polynôme X et $\left(\left(\lim\limits_{+\infty} \widetilde{X}\right)\left(\lim\limits_{-\infty} \widetilde{X}\right) = -\infty\right)$. Soit λ cette racine réelle, alors λ est valeur propre de A.

Ce qui est en contradiction avec $\operatorname{Sp} A \subset \{\text{racines réelles de } X^2 + 1\} = \varnothing$, donc n est pair.

- 2^e méthode

$\det\left(A^2\right) = \det\left(-I_n\right)$, or $\det\left(A^2\right) = \left(\det A\right)^2$ et $\det\left(-I_n\right) = (-1)^n$, donc $\left(\det A\right)^2 = (-1)^n$; or $\det A \in \mathbb{R}$, donc $\left(\det A\right)^2 \in \mathbb{R}^+$, et par suite n est pair.

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car A n'admet pas de valeur propre réelle, mais considérée comme élément de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, elle est diagonalisable car X^2+1 est un polynôme annulateur de A, scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Les valeurs propres de A sont i et $-i$ de même ordre de multiplicité p avec $n = 2p$ car le polynôme caractéristique de A est un polynôme à coefficients réels.

Et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & 0 \\ & & i & & & & & \\ 0 & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -i & \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

La matrice B vérifie $B^2 + I_n = 0$ donc est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice diagonale D en posant :

$$D = \begin{pmatrix} i & & & & & & & \\ & i & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & -i \end{pmatrix}$$

Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $D = Q^{-1}BQ$.

A et B sont semblables à D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, d'après l'exercice précédent, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 17

On considère n complexes non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ deux à deux distincts et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & & a_j & & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & & a_n \\ \vdots & \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_j & & 0 \end{pmatrix}$$

$(a_{ij} = 0$ si $i = j$, $a_{ij} = a_j$ si $i \neq j)$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1) Montrer que les valeurs propres de A vérifient l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = +1.$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

3) On suppose, dans cette question, $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1$. A est-elle diagonalisable ?

---

1) Soit χ le polynôme caractéristique de A :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \chi(x) = \det\left(A - xI_n\right).$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \chi\left(-a_j\right) = \begin{vmatrix} a_j & a_2 & & a_j & & a_n \\ a_1 & a_j & & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & & a_n \\ \vdots & \vdots & & a_j & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_j & & a_j \end{vmatrix}$$

$$= a_j \begin{vmatrix} a_j & a_2 & & 1 & & a_n \\ a_1 & a_j & & 1 & & a_n \\ a_1 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & & \underbrace{}_{j^e \text{ colonne}} & & a_j \end{vmatrix}$$

> On ne modifie pas ce déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

$\forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\},\ C_k \leftarrow C_k - a_k C_j.$

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \chi(-a_j)=a_j\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & & & & \overbrace{\quad}^{j^e\text{ colonne}} & \end{array}\\ \underbrace{\begin{vmatrix} +a_j-a_1 & 0 & & 0 & 1 & 0\\ 0 & +a_j-a_2 & & & 1 & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & & \vdots\\ 0 & 0 & & +a_j-a_k & 1 & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & & 0 & 1 & +a_j-a_n\end{vmatrix}}_{n}\end{array}$$

en développant selon la j^e ligne, on obtient :

$$\chi(-a_j)=(-1)^{n-1}a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{k=n}(-a_j+a_k).$$

Or, en posant $Q(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$Q'(-a_j)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}(-a_j+a_k).$$

> En effet, $Q(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors :
>
> $$Q'(x)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}(x+a_k)\text{ pour tout }x\in\mathbb{R}$$
>
> $(x+a_j)$ intervient dans $(n-1)$ termes de cette somme donc :
>
> $$Q'(-a_j)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(-a_j+a_k).$$

Avec cette nouvelle notation, on obtient :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \chi(-a_j)=(-1)^{n-1}a_jQ'(-a_j).$$

> $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda+a_k}$ est la valeur en $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ de la fonction rationnelle $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x+a_k}$ qui «fait» penser à une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est $Q(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{a_k,k\in[\![1,n]\!]\}$, étudions $\frac{\chi(x)}{Q(x)}$.

Le degré de χ et de Q est égal à n. χ a pour coefficient dominant $(-1)^n$. Q est unitaire.

> Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $-a_k$ n'est pas racine de χ d'après la relation :
>
> $$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \chi(-a_k)=(-1)^{n-1}a_kQ'(-a_k).$$
>
> En effet, $a_k\neq 0$ et $-a_k$ est racine simple de Q, donc $\chi(-a_k)\neq 0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

Il existe $(\alpha_1\ \ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $\frac{\chi(x)}{Q(x)}=(-1)^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x+a_k}$, et $\forall k\in[\![1,n]\!],\alpha_k=\frac{\chi(-a_k)}{Q'(-a_k)}$.

Car, à nouveau, les complexes a_k, $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts par hypothèse, donc les racines du polynôme Q sont simples et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Q'(-a_k) \neq 0$.

Donc, d'après le résultat obtenu plus haut :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha_k = (-1)^{n-1} a_k$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{a_k, k \in [\![1, n]\!]\},\ \frac{\chi(x)}{Q(x)} = (-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{x + a_k}.$$

Or λ est valeur propre de A si et seulement si $\chi(\lambda) = 0$, donc λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{\lambda + a_k} = 0.$$

Par suite, λ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1.$$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Tr}(A) = 0.$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A = \chi(0) = Q(0)\left[(-1)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} a_k}{a_k}\right]$, or $\displaystyle Q(0) = \prod_{k=1}^{n} a_k$, donc :

$$\chi(0) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left((-1)^n + n(-1)^{n-1}\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k$$

on obtient alors :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} a_k(S - a_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \text{en posant } S = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_i a_j\end{aligned}$$

3) En supposant $0 < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_k < a_{k-1} < \cdots < a_1$, la fonction :

$$f\ :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x + a_k}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $I_k = \left]-a_{k-1}, -a_k\right[$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $I_1 = \left]-\infty, -a_1\right[$, $I_{n+1} = \left]-a_n, +\infty\right[$.

De plus, pour tout $x \in I_k$, $\displaystyle f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{(x + a_k)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur I_k pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ avec $f(I_1) = \left]-\infty, 0\right[$, $f(I_k) = \mathbb{R}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ et $f(I_{n+1}) = \left]0, +\infty\right[$.
En appliquant le théorème des fonctions réciproques à chaque restriction $f_{|I_k}$, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, il existe λ_k unique dans I_k tel que $f(\lambda_k) = 1$.
On obtient ainsi n valeurs propres deux à deux distinctes et A est diagonalisable.

Il s'agit bien sûr d'une condition suffisante de diagonalisabilité.

Ex. 18

$n \in \mathbb{N}^*$.

ν est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

ν_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

ν_1 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $T_n\ :\ \nu_0 \to \nu,\ F \mapsto F_n$ où $F_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{x^n}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}F(t)\,\mathrm{d}t \\ F_n(0) = F(0) \end{cases}$

1) Montrer que T_n est linéaire, puis que $T_n \in \mathcal{L}(\nu_0)$.

Soit $U_n = T_{n|\nu_1}$; montrer que $U_n \in \mathcal{L}(\nu_1)$.

2) T_n (resp. U_n) est-elle injective ? surjective ?

3) Déterminer les éléments propres de U_n et T_n.

1) La linéarité de T_n est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégration.

> Pour montrer que $T_n \in \mathcal{L}(\nu_0)$, il faut montrer que F_n est continue sur $\mathbb{R}$. La seule difficulté provient de la continuité de F_n en 0.

- Étude de la continuité de F_n en 0.

$$F_n(x) - F_n(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}F(t)\,\mathrm{d}t - F(0) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\big(F(t) - F(0)\big)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{car}\quad \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = +1$$

$$|F_n(x) - F_n(0)| \leqslant \frac{n}{x^n}\left|\int_0^x t^{n-1}\,|F(t) - F(0)|\,\mathrm{d}t\right|$$

or F est continue en 0 :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x| < \eta\ \Rightarrow\ |F(x) - F(0)| < \varepsilon\big)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant |x| < \eta\ \Rightarrow\ |F(t) - F(0)| < \varepsilon$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \eta\ \Rightarrow\ |F_n(x) - F_n(0)| < \varepsilon.$$

On vient donc de montrer la continuité de F_n en 0, on en déduit que $F_n \in \nu_0$, donc $T_n \in \mathcal{L}(\nu_0)$.

> On peut remarquer que F_n est dérivable sur chacun des intervalles $I = \left]0, +\infty\right[$ ou $\left]-\infty, 0\right[$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
>
> $$F_n'(x) = -\frac{n^2}{x^{n+1}}\int_0^x t^{n-1}F(t)\,\mathrm{d}t + \frac{n}{x^n}\big(x^{n-1}F(x)\big)$$
>
> $$= \frac{n}{x}\left(-\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}F(t)\,\mathrm{d}t + F(x)\right)$$
>
> $$= \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big).$$
>
> Ainsi, si $F \in \nu_0$ alors $F_n \in \nu_0$ et, de plus, F_n est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

- Soit $F \in \nu_1$ alors F_n' est continue sur $\mathbb{R}^*$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$F_n'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big).$$

Montrons que F_n est dérivable en 0.

Soit $G\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) - F(0) - x\,F'(0)$, alors $G(x) = o(x)$ car F est dérivable en 0 :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*\ /\ \big(\,|x| < \eta\ \Rightarrow\ |G(x)| < \varepsilon\,|x|\,\big).$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(\,|x| < \eta\ \Rightarrow\ |T_n(G)(x)| \leqslant \varepsilon \frac{n}{n+1}\,|x| \leqslant \varepsilon\,|x|\,\Big)$$

or :

$$T_n(G)(x) = \begin{cases} F_n(x) - F(0) - \dfrac{n}{n+1}x\,F'(0) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et $F_n(0) = F(0)$; ainsi :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \exists\, \eta \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(\,|x| < \eta\ \Rightarrow\ \Big|F_n(x) - F_n(0) - \frac{n}{n+1}xF'(0)\Big| \leqslant \varepsilon\,|x|$$

donc F_n admet un développement limité à l'ordre un en 0, ce qui est équivalent à :

$$F_n \text{ est dérivable en 0 et } F_n'(0) = \frac{n}{n+1}F'(0).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big) \\ &= \frac{n}{x}\Big(\big(F(x) - F(0)\big) + \big(F(0) - F_n(x)\big)\Big) \\ &= n\left(\frac{F(x) - F(0)}{x} - \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x}\right) \quad \text{car}\ \ F_n(0) = F(0). \end{aligned}$$

Or F est dérivable en 0 par hypothèse ; on vient de montrer que F_n est dérivable en 0 donc :

$$\lim_0 \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) \quad , \quad \lim_0 \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x} = F_n'(0)$$

donc F_n' admet une limite en 0 et on a :

$$\begin{aligned} \lim_0 F_n' &= n\big(F'(0) - F_n'(0)\big) \\ &= n\left(F'(0) - \frac{n}{n+1}F'(0)\right) = \frac{n}{n+1}F'(0) \\ &= F_n'(0) \end{aligned}$$

donc F_n' est continue en 0 ; puis F_n' est continue sur $\mathbb{R}$, donc F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, $U_n \in \mathcal{L}(\nu_1)$.

> Il peut être utile de revoir le théorème de dérivabilité et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, conséquence du théorème de l'inégalité des accroissements finis, bien qu'il ne soit pas utilisé ici.

2) - T_n est-elle injective ?

Étudions Ker T_n . Si $F \in$ Ker T_n alors $F \in \nu_0$ et $T_n(F) = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \big(T_n(F)\big)'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - F_n(x)\big)$$

donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, or F est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $F = 0$ et Ker $T_n = \{0\}$. On en déduit l'injectivité de T_n .

- T_n est-elle surjective ?

Si $F \in \nu_0$ alors $T_n(F) = F_n \in \nu_0$ et F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, or la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x-1|$ est un élément de ν_0 et n'est pas dérivable en 1, donc :

$$\forall F \in \nu_0 \, , \, T_n(F) \neq G.$$

T_n n'est pas surjective.

- U_n est-elle injective ?

$\operatorname{Ker} U_n = \left(\operatorname{Ker} T_n \right) \cap \nu_1 = \{0\}$, donc U_n est injective.

- U_n est-elle surjective ?

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)|x-1|$. G est élément de ν_1.

S'il existe $F \in \nu_1$ telle que $U_n(F) = G$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - G(x)\big)$$

et donc G' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Or $G' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x-1|$ n'est pas dérivable en 1, ainsi : $\forall F \in \nu_1, U_n(F) \neq G$, et U_n n'est pas surjective.

3) Éléments propres de T_n, de U_n

> T_n et U_n étant injectives, 0 n'est pas valeur propre de T_n (resp. de U_n), donc, dans ce qui suit, nous allons rechercher les valeurs propres α non nulles.

a) F est un vecteur propre de T_n attaché à la valeur propre α si et seulement si :

$$\begin{cases} F \in \nu_0 \setminus \{0\} \\ T_n(F) = \alpha F \end{cases}$$

donc F est solution sur I (qui est l'un des intervalles $]-\infty, 0[,]0, +\infty[$) de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$:

$$\alpha y' = \frac{n}{x}\big(y - \alpha y\big) \iff \alpha x y' + n(\alpha - 1)y = 0. \tag{$\mathscr{E}$}$$

> Car pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
>
> $$\big(T_n(F)\big)'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - T_n(F)(x)\big);$$
>
> $$\alpha F'(x) = \frac{n}{x}\big(F(x) - \alpha F(x)\big).$$

Comme l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension un, g est solution sur I si et seulement si :

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \,]-\infty, 0[, \quad g(x) = C_1 |x|^{n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} \; ;$$

$$\exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \,]0, +\infty[, \quad g(x) = C_2 |x|^{n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)} .$$

Or F est continue sur $\mathbb{R}$, il est donc nécessaire que :

$$n\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \geqslant 0.$$

Si $\alpha = 1$, alors $C_1 = C_2 = C$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto C$.

Si $\alpha \in \,]0, 1[$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F(0) = F(0)$ et :

$$F\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} C_1\,|x|^{\beta} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ C_2\,|x|^{\beta} & \text{si } x \in [-\infty,0[\end{cases}$$

où on a posé $\beta = n\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) \iff \alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$.

F est un vecteur propre de T_n si et seulement si :

- ou bien il existe $(C_1\,.\,C_2) \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $F(x) = \begin{cases} C_1 x^{\beta} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ C_2\,|x|^{\beta} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$ et la valeur propre correspondante est $\alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$;
- ou bien $C_1 = C_2$, $\beta = 0$, $F(x) = C$ et la valeur propre correspondante est $\alpha = 1$.

b) F est un vecteur propre de U_n si et seulement si F est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$, donc F est un vecteur propre de U_n si et seulement si :

- ou bien il existe $(C_1\,.\,C_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \in]1,+\infty[$ tels que $F(x) = \begin{cases} C_1 x^{\beta} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ C_2\,|x|^{\beta} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$ (valeur propre correspondante $\alpha = \dfrac{n}{n+\beta}$) ;
- ou bien il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = Cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex. 19

A est une matrice réelle non scalaire, de taille $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, vérifiant $A^3 + A^2 - I_n = 0$.

1) Montrer que $\det A > 0$.

2) A est-elle diagonalisable dans :

a) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Le polynôme $X^3 + X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A.

La fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^3 + x^2 - 1$ admet pour dérivée $f'\ :\ x \mapsto 3x^2 + 2x$, et pour tableau de variation :

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{23}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

> Il convient ici d'étudier les racines de $X^3 + X^2 - 1$ pour «obtenir» des renseignements sur les valeurs propres de A, puis son polynôme caractéristique : en effet, si λ est valeur propre de A, alors λ est racine du polynôme annulateur $X^3 + X^2 - 1$.

$\forall x \in]-\infty,0]$, $f(x) < 0$, donc f n'admet pas de racines réelles sur $]-\infty,0]$.

Par application du théorème des valeurs intermédiaires à f continue, f admet une racine réelle α sur $]0,+\infty[$. Cette racine est unique d'après la stricte monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

> La fonction f étant une fonction polynôme à coefficients réels, de degré 3, les deux autres racines de f sont complexes conjuguées.

Les racines de $X^3 + X^2 - 1$ sont donc simples : une unique racine réelle $\alpha > 0$, et deux racines complexes : β et $\overline{\beta}$ simples.

> Toute valeur propre de A est une racine de $X^3 + X^2 - 1$.

$\mathrm{Sp}\, A \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit χ le polynôme caractéristique de A ; alors χ admet pour racines :

$$\beta \text{ d'ordre de multiplicité } m \in \mathbb{N}$$

$$\overline{\beta} \text{ d'ordre de multiplicité } m$$

> β et $\overline{\beta}$ ont le même ordre de multiplicité car χ est à coefficients réels, A étant une matrice à coefficients réels.

$$\alpha \text{ d'ordre de multiplicité } q \in \mathbb{N}$$

donc :

$$\chi(X) = (-1)^n (X - \alpha)^q (X - \beta)^m \left(X - \overline{\beta}\right)^m.$$

> m peut être nul, de même q mais m et q sont liés par la relation $2m + q = n$.

Or $\chi(0) = \det A = \beta^m \overline{\beta}^m \alpha^q = \underbrace{(\beta\overline{\beta})^m}_{\in \mathbb{R}_+^*} \underbrace{\alpha^q}_{\in \mathbb{R}_+^*}$ car $\alpha > 0$, et $\beta\overline{\beta} = |\beta|^2 \in \mathbb{R}_+^*$ car $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc :

$$\det A > 0.$$

2) a) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $m = 0$ et alors :

$$\chi_n(X) = (-1)^n (X - \alpha)^n.$$

Si A est diagonalisable, alors A est semblable à $A = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ donc $A = \alpha I_n$.

> Une condition nécessaire de diagonalisibilité de A est que le polynôme caractéristique de A soit scindé. Ce n'est bien sûr pas une condition suffisante.

Or, par hypothèse, A n'est pas scalaire donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Le polynôme $X^3 + X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ex. 20

Les équations suivantes admettent-elles des solutions ? Si oui, lesquelles.

1) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors A est nilpotente d'indice 3 ; en effet :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existe $X \in \mathcal{M}_3(K)$ tel que $X^2 = A$, alors $X^6 = A^3$ donc $X^6 = 0$, ainsi X est nilpotente.

On peut rappeler le résultat suivant.
$M \in \mathcal{M}_n(K)$, $(n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$, est nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $M^p = 0$) si et seulement si $M^n = 0$.

Donc $X^3 = 0$ ce qui entraine $X^4 = 0$. Or $X^4 = A^2 \neq 0$: nous aboutissons à une contradiction ; et par suite $X^2 = A$ n'a pas de solution.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2, 3\}$; $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres deux à deux distinctes donc est diagonalisable.
Il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}BP.$$

P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

S'il existe $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $Y^2 = B$, alors Y et B commutent.

En effet, $YB = Y \cdot Y^2 = Y^3 = Y^2 \cdot Y = BY$.

Et Y est diagonalisable dans la base de vecteurs propres de B.

En effet, soit $W \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B, alors il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$:

$$\begin{cases} BW = \lambda W \\ W \neq 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \underbrace{Y(BW)}_{=(BY)W \text{ car } B \text{ et } Y \text{ commutent}} = \lambda YW$$

Donc $B(YW) = \lambda(YW)$, par suite :

$$YW \in \mathrm{Ker}\,(B - \lambda I_3) = \mathbb{R}W$$

et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $YW = \mu W$ (avec toujours $W \neq 0$) donc pour tout vecteur propre W de B, W est également vecteur propre de Y.

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P^{-1}YP = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{=\Delta}$

et
$$Y^2 = B \iff \Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \iff \Delta \in \mathscr{E}$$

où :
$$\begin{aligned}\mathscr{E} = \big\{&\mathrm{diag}\,(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathrm{diag}\,(1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathrm{diag}\,(1, \sqrt{2}, -\sqrt{3}), \mathrm{diag}\,(-1, \sqrt{2}, \sqrt{3}),\\ &\mathrm{diag}\,(-1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathrm{diag}\,(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{3}), \mathrm{diag}\,(1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}),\\ &\mathrm{diag}\,(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3})\big\}\end{aligned}$$

Finalement :

$$Y^2 = B \iff Y = P\,\Delta\,P^{-1} \text{ où } \Delta \in \mathscr{E}.$$

Ex. 21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1) Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

$\forall Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \exists!(X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(K)\right)^2 / Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Si Z est un vecteur propre de B, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} BZ = \lambda Z \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda Y \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda^2 X \\ Z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AX = \lambda^2 X \\ X \neq 0 \\ Y = \lambda X \end{cases}$$

Ainsi X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, soit X un vecteur propre de A associé à une valeur propre positive μ de A et $\lambda \in \left\{-\sqrt{\mu}, +\sqrt{\mu}\right\}$, alors :

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

> *Remarque.* $X \neq 0$ car c'est un vecteur propre de A, donc Z est non nul.

On obtient donc les sous-espaces propres de la matrice B en fonction de ceux de A.

1) Si 0 est valeur propre de A, alors 0 est aussi valeur propre de B et :

$$\operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker} A \right\}.$$

> *Remarque.* Ker B et Ker A sont isomorphes.

2) Si μ est une valeur propre strictement positive de A, alors $\lambda \in \left\{\sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu}\right\}$ est valeur propre de B :

$$\operatorname{Ker}\left(B - \sqrt{\mu} I_{2n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ \sqrt{\mu} X \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \right\}$$

$$\operatorname{Ker}\left(B + \sqrt{\mu} I_{2n}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -\sqrt{\mu} X \end{pmatrix}, X \in \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \right\}$$

et l'application $\operatorname{Ker}\left(A - \varepsilon\sqrt{\mu} I_n\right) \to \operatorname{Ker}\left(B - \mu I_{2n}\right), X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ \varepsilon\sqrt{\mu} X \end{pmatrix}$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} B} \operatorname{Ker}\left(B - \lambda I_{2n}\right) &= \dim \left(\operatorname{Ker} B \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \left(\operatorname{Ker}\left(B - \sqrt{\mu} I_{2n}\right) \bigoplus \operatorname{Ker}\left(B + \sqrt{\mu} I_{2n}\right) \right) \right) \\ &= \dim \operatorname{Ker} A + 2 \sum_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \dim \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \\ &= \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \end{aligned}$$

Si A est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) = 2 \dim \bigoplus_{\mu \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) = 2n.$$

Donc B est diagonalisable.

Si A n'est pas diagonalisable ou admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}^-$, alors :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu > 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) < n \ ; \ \dim \bigoplus_{\substack{\mu \in \operatorname{Sp} A \\ \mu \geqslant 0}} \operatorname{Ker}\left(A - \mu I_n\right) \leqslant n$$

donc :

$$\dim \bigoplus_{\substack{\mu\in \mathrm{Sp}\,A\\ \mu>0}} \mathrm{Ker}\,(A-\mu I_n) + \dim \bigoplus_{\substack{\mu\in \mathrm{Sp}\,A\\ \mu>0}} \mathrm{Ker}\,(A-\mu I_n) < 2n.$$

Et, par suite, B n'est pas diagonalisable.

Finalement, B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et a toutes valeurs propres strictement positives.

> *Remarque.* Avec l'hypothèse :
>
> $$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$
>
> on obtient B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable *et* inversible.

Ⓒ Réduction triangulaire ou diagonale

Ex. 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice par blocs $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit :

1) trigonalisable ;

2) diagonalisable.

Soit la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

B est trigonalisable et non diagonalisable.

Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

> À partir de ces résultats sur la matrice B, par analogie nous allons mener des calculs sur M. (B est un cas très particulier de matrice M avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $A = (1)$.)

En remarquant que :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

et en posant $P_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, on a :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Formons alors :

$$M_1 = P_1^{-1}MP_1 .$$

> Comme plus haut, nous avons «formé» $P^{-1}BP$.

Alors :

$$M_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

1) M est trigonalisable si et seulement si M_1 est trigonalisable.

> Car M et M_1 sont semblables.

Or M_1 est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable, donc M est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

2)

> Nous allons répondre à cette question en utilisant deux méthodes différentes.

- Première méthode

D'abord M est diagonalisable si et seulement si M_1 est diagonalisable.

> Car M et M_1 sont semblables.

D'où une recherche de condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de la matrice M_1, donc de M.

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ canoniquement associé à la matrice M_1 ; $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, E est stable par u et la restriction de u à E induit un endomorphisme u_1 de E dont la matrice dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est A.

Si u est diagnalisable alors u_1 est diagonalisable.

> C'est du cours. En effet, si u est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur de u (donc de M_1), scindé à racines simples. Ce même polynôme est annulateur de u_1 (donc de A) et est (toujours) à racines simples et scindé donc u_1 est diagonalisable, c'est-à-dire A est diagonalisable.

On obtient alors la condition nécessaire : pour que M soit diagonalisable, il faut que A soit diagonalisable.

(ii) Réciproquement, soit A diagonalisable.

$$\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \,/\, Q^{-1}AQ = D.$$

> 1) Notation : $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels et diagonales.
>
> 2) Par analogie, formons $Q_1^{-1}M_1Q_1$ où :
>
> $$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R}).$$

D'une part, $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$ donc $Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

D'autre part, $Q_1^{-1}M_1Q_1 = \begin{pmatrix} D & -2D \\ 0 & D \end{pmatrix} = \Delta$.

Donc M_1 et Δ sont semblables.

> On peut remarquer que $\text{Sp}(M_1) = \text{Sp}\,\Delta = \text{Sp}(A)$ et que, si λ est valeur propre de multiplicité $m(\lambda)$ de A, alors c'est aussi une valeur propre de M_1 (donc de M) d'ordre de multiplicité $2m(\lambda)$.

$$\Delta = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
\lambda_1 & & & & & & -2\lambda_1 & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\
& & \lambda_1 & 0 & & & & & -2\lambda_1 & & 0 & \\
& & & \lambda_2 & 0 & & & & & -2\lambda_2 & & \\
& & 0 & & \ddots & & & & 0 & & \ddots & \\
& & & & & \lambda_p & & & & & & -2\lambda_p \\
\hline
& & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
& & & & & & & \ddots & & & & \\
& & 0 & & & & & & \lambda_1 & & 0 & \\
& & & & & & & & 0 & \lambda_2 & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & \lambda_p
\end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array} \\
\qquad\quad n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \qquad\qquad
\end{array}$$

Ainsi M_1 est diagonalisable si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ 2m(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}\left(M_1 - \lambda I_{2n}\right).$$

Étudions, plus précisément, λ_1.

$\Delta - \lambda_1 I_{2n} =$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & & & & & & -2\lambda_1 & & & & & \\
& 0 & & & & & & \ddots & & & & \\
& & \ddots & & & & & & -2\lambda_1 & & & \\
& & & \lambda_2 - \lambda_1 & & & & & & -2\lambda_2 & & \\
& & & & \ddots & & & & & & \ddots & \\
& & & & & \lambda_p - \lambda_1 & & & & & & -2\lambda_p \\
\hline
& & & & & & 0 & & & & & \\
& & & & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & & 0 & & & \\
& & 0 & & & & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & \lambda_p - \lambda_1
\end{array}\right)$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{rg}\left(\Delta - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2n - m(\lambda_1)$;

si $\lambda_1 = 0$, $\operatorname{rg}\left(\Delta - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2n - 2m(\lambda_1) = 2\left(n - m(\lambda_1)\right)$.

C'est-à-dire :

si $\lambda_1 \neq 0$, $\dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda_1 I_{2n}\right) = m(\lambda_1)$;

si $\lambda_1 = 0$, $\dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda_1 I_{2n}\right) = 2m(\lambda_1)$.

> Ceci par application du théorème du rang aux endomorphismes :
> $$\left(u_1 - \lambda_1 \mathrm{Id}_E\right) \in \mathscr{L}(E) \quad \text{et} \quad \left(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}\right) \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right).$$

En généralisant ce raisonnement à tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on obtient donc :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim \operatorname{Ker}\left(M - \lambda I_{2n}\right) = 2m(\lambda) \text{ si et seulement si } \lambda = 0.$$

On obtient ainsi, A étant diagonalisable, M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

En conclusion, M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

- Seconde méthode

> On va maintenant utiliser la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité : pour qu'une matrice (resp. un endomorphisme) soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme annulateur, scindé, à racines simples, de cette matrice (resp. de cet endomorphisme).

• Calculons d'abord M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Montrons, par exemple par récurrence, que $M^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

(i) amorce : $k = 1$.

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M_1^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} M_1^{k+1} = M_1^k \cdot M_1 &= \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2A^{k+1} - 2kA^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

(ii) D'où le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

• Remarquons ensuite que $\det\left(M_1 - XI_{2n}\right) = \left(\det\left(A - XI_n\right)\right)^2$ donc :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}\left(M_1\right).$$

• Supposons M_1 diagonalisable ; alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples, tel que $Q\left(M_1\right) = 0$:

$$Q = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \quad \text{donc} \quad Q\left(M_1\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k M_1^k.$$

$$Q\left(M_1\right) = \left(\begin{array}{c|c} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k & \displaystyle -2\sum_{k=0}^{N} k a_k A^k \\ \hline & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A) & -2AQ'(A) \\ \hline 0 & Q(A) \end{array}\right)$$

Si $Q\left(M_1\right) = 0$, alors $Q(A) = 0$, donc A est diagonalisable car Q est scindé à racines simples.

• Réciproquement, si A est diagonalisable, soit R son polynôme minimal, alors :

$$R = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda).$$

M_1 est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est R.

R étant annulateur de A, scindé et à racines simples :

$$R\left(M_1\right) = \left(\begin{array}{c|c} R(A) & -2AR'A \\ \hline 0 & R(A) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -2AR'(A) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R\left(M_1\right) = 0$ si et seulement si $AR'(A) = 0$, donc si et seulement si $XR'(X)$ est un polynôme annulateur de A, ce qui est équivalent à $XR'(X)$ est un multiple du polynôme minimal R de A. Or $d^\circ XR'(X) = d^\circ R(X)$; R est unitaire, le coefficient dominant de $XR'(X)$ est N où $N = d^\circ R$.

> *Remarque.* Tout polynôme minimal est de degré supérieur ou égal à 1, donc $d^\circ\left(R'\right) \in \mathbb{N}$.

Donc :

$$XR'(X) = NR(X).$$

D'abord 0 est une racine de R puis, si λ est une racine non nulle de R, alors λ est racine de R', donc λ est une racine de R d'ordre de multiplicité au moins double, ce qui est en contradiction avec le choix de R à racines simples, donc R n'admet pas de racine non nulle.

Étant unitaire et à racines simples, admettant 0 pour racine, $R = X$ (et $N = 1$) ; or $R(A) = 0$, donc $A = 0$.

Ainsi M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Ex. 23

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ a_2 & 0 & \ddots & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les a_i sont des réels positifs, a_1 et a_n l'étant strictement.

1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M et prouver qu'elle admet une valeur propre strictement positive et une seule.

2) Montrer que si r est la valeur propre strictement positive de M, alors :

$$r < 1 + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i .$$

3) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, M^p est à termes strictement positifs. (On pourra écrire M sous la forme $A + N$.)

1) Il s'agit d'une question très classique puisqu'à une permutation près des colonnes, M est la matrice compagnon de $(a_1, \dots, a_n)$.

On a ici $\chi_M(X) = \det\left(M - XI_n\right) = \begin{vmatrix} a_1 - X & 1 & & & \\ a_2 & -X & 1 & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ a_n & & & & -X \end{vmatrix}$, soit aussi :

$$\chi_M(X) = \det\left(L_1, L_2, \dots, L_n\right) \text{ où } L_1, \dots, L_n \text{ désignent les lignes de } M - XI_n .$$

En opérant les transformations élémentaires successives symbolisées par $L_i \leftarrow L_i + XL_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$, on obtient :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a_1 - X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 + a_1X - X^2 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ a_3 + a_2X + a_1X^2 - X^3 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ a_n + a_{n-1}X + \dots + a_1X^{n-1} - X^n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_M(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \right).$$

Il est également possible de procéder par récurrence : en posant $D_n = \det\left(M - XI_n\right)$, le développement par rapport à la dernière ligne donne $D_n = -XD_{n-1} - (-1)^n a_n$, puis à partir de $D_1 = a_1 - X$, $D_2 = X^2 - a_1X - a_2$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n = (-1)^n\left(X^n - a_1X^{n-1} - a_{n-1}X - a_n\right).$$

Par hypothèse, on a $a_n \neq 0$ donc $\chi_M(0) \neq 0$ et 0 n'est pas valeur propre de M. On en déduit :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_M(\lambda) = 0 \iff 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda^i}.$$

Les a_i étant positifs, et deux d'entre eux étant non nuls, la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x^i}$ est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\varphi\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$. Ceci prouve l'existence d'un unique $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\lambda) = 1$, soit aussi tel que $\chi_M(\lambda) = 0$.

2) Posons $s = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i : s \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, la fonction φ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $r < 1 + s \iff f(r) > f(1 + s)$, donc :

$$r < 1 + s \iff f(1 + s) < 1.$$

Formons $f(1 + s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1 + s)^k}$. Par définition de s, on obtient :

$$f(1+s) \leqslant s \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+s)^k} < s \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+s)^k} \quad \text{donc} \quad f(1+s) < \frac{s}{1+s} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1+s}}$$

c'est-à-dire $f(1 + s) < 1$ et la conclusion s'ensuit.

3) Il faut se laisser guider par l'énoncé qui nous suggère d'introduire la matrice nilpotente
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Il va cependant falloir prendre garde au fait que A et N n'étant pas permutables, une puissance $(A + N)^k$ ne s'obtient pas avec la formule du binôme. En posant $P_1 = A$ et $P_2 = N$, une telle puissance s'écrit :

$$(A + N)^k = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in [\![1,2]\!]^k} P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}.$$

Enfin, il est utile de remarquer que puisque A et N ne comportent que des termes positifs ou nuls, il en est de même pour tout produit $P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}$. En conséquence, pour s'assurer que la matrice $(A + N)^k$ a un élément strcitement positif en position (i, j), il suffit de vérifier qu'il en est ainsi pour l'un des produits $P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_k}$.

Avec les matrices A et N précisées dans la remarque précédente, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \forall j \in [\![0, n-1]\!],\quad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots\dots & 0 \\ a_1^{k-1}a_2 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1^{k-1}a_n & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & (0) & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & (0) & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{j \text{ colonnes}} \end{array}$$

$$A^k N^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_1^{k-1}a_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \underbrace{a_1^{k-1}a_n}_{(j+1)^e \text{ colonne}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^{n-i}A^k N^j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1^{k-1}a_{n-i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_1^{k-1}a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \underbrace{0}_{(j+1)^e \text{ colonne}} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-i \text{ colonnes} \end{array}$$

En conséquence, pour $p \geqslant 2n$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le développement de $(A+N)^p$ contient le produit $N^{n-i}A^{p-n+i-j+1}N^{j-1}$ dont l'élément de position (i, j) est $a_1^{p-n+i-j}a_n > 0$. Le coefficient de même position de tous les autres produits étant $\geqslant 0$, on en déduit que le terme de position (i, j) de $(A+N)^p$ est strictement positif.
Ainsi, pour $p \geqslant 2n$, tous les termes de M^p sont strictement positifs.

Ex. 24

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

1) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

2) Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

1) Il est bon d'éliminer les cas triviaux où l'une ou l'autre des deux matrices est nulle. On pensera ensuite à la localisation des vecteurs propres d'un endomorphisme f : ceux-ci sont dans le noyau ou dans l'image de f.
Plus précisément, si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, 0 est valeur propre et tout $x \in \operatorname{Ker} f \setminus \{0\}$ est vecteur propre ; tout autre vecteur propre, associé à une valeur propre non nulle, est dans $\operatorname{Im} f$.

Tout polynôme appartenant à $\mathbb{C}[X]$ étant scindé, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre et donc au moins une droite pointée (c'est-à-dire privée de 0) de vecteurs propres.

Si l'une des deux matrices est nulle, tout vecteur propre de l'autre est commun aux deux. Pour la suite, on se limite donc à $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et on peut remarquer que cela impose A et B non inversibles (en effet $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $AB = 0$ donne $B = 0$ qui est exclu et de même $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ conduit à $A = 0$ qui est exclu).

En notant u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associées à A et B, l'hypothèse $AB = 0$ se lit $u \circ v = 0$ et équivaut donc à $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$.

> Si $\mathrm{Im}\, v$ contient des vecteurs propres de v, le problème est résolu. On est donc amené à envisager deux cas selon que $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$ ou $\mathrm{Sp}(v) \neq \{0\}$ ($\mathrm{Sp}(v)$ désigne le spectre de v).

- Premier cas : $\mathrm{Sp}(v) \neq \{0\}$

Il existe λ valeur propre non nulle de v. Alors, si x est un vecteur propre associé, on a :

$$v(x) = \lambda x \quad \text{donc} \quad x = v\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathrm{Im}\, v$$

et, puisque $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$, x est également vecteur propre de u (associé à la valeur propre 0).

- Deuxième cas : $\mathrm{Sp}(v) = \{0\}$

Alors $\chi_v(x) = \det(B - XI_n)$ est un polynôme scindé amettant 0 comme seule racine, donc $\chi_v(X) = (-1)^n X^n$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient $v^n = 0$: v est nilpotent. Appelons p l'indice de nilpotence de v : $v^p = 0$, $v^{p-1} \neq 0$; puisque v est non nul, on a $p \geqslant 2$ (donc $2 \leqslant p \leqslant n$).

Sachant que $v^{p-1} \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = v^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $v^p = 0$ donne $v(y) = 0$ donc y est vecteur propre de v. D'autre part, avec $p \geqslant 2$, on peut écrire $u(y) = u \circ v\left(v^{p-2}(x)\right)$ et, puisque $u \circ v = 0$, il vient $u(y) = 0$: y est également vecteur propre de u.

2)

> La question 1) prépare une démonstration par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la propriété

(H_n) : pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(BC)$ telle que $P^{-1}AP = T_A$ et $P^{-1}BP = T_B$ avec T_A et T_B triangulaires supérieures.

(H_1) est évidente.

Supposons (H_{n-1}) vraie et soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

D'après le 1), il existe $Q_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q_1^{-1}BQ_1 = \begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(A_1 \,.\, B_1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})^2$, $(L_A \,.\, L_B) \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})^2$, $0 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$.

Q_1 est la matrice de passage de la base canonique à une base dont le premier élément est vecteur propre commun à u et v.

Avec :

$$\begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \lambda L_B + L_A B_1 \\ 0 & A_1 B_1 \end{pmatrix}$$

la condition $AB = 0$ donne $A_1 B_1 = 0$ donc, d'après (H_{n-1}), il existe $Q_2' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q_2'^{-1} A_1 Q_2' = T_A' \quad \text{et} \quad Q_2'^{-1} B_1 Q_2' = T_B'$$

où T_A' et T_B' sont triangulaires supérieures.

Posons $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2' \end{pmatrix}$, on a $Q_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2'^{-1} \end{pmatrix}$, et il vient :

$$Q_2^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & L_A \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda & L_A' \\ 0 & T_A' \end{pmatrix} \quad , \quad Q_2^{-1}\begin{pmatrix} \mu & L_B \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \mu & L_B' \\ 0 & T_B' \end{pmatrix}$$

> Il est inutile de préciser les blocs lignes L_A' et L_B'.

Enfin, il reste à poser $P = Q_1 Q_2$ pour obtenir :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & L_A' \\ 0 & T_A' \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & L_B' \\ 0 & T_B' \end{pmatrix}$$

Ces matrices étant triangulaires supérieures, A et B sont simultanément trigonalisables.

Ainsi, on a montré $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$, donc, puisque (H_1) est vraie, le principe de récurrence donne que (H_n) est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D Applications de la réduction

Ex. 25

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ ($\dim E \in \mathbb{N}^*$).
Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

> On sait que si λ est une valeur propre de u, alors le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda e)$ est stable par u (la restriction de u à $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda e)$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ), et donc toutes les droites et les plans de $E_\lambda(u)$ sont stables par u. Il existe donc au moins une droite vectorielle stable par u. Le problème se pose donc lorsque u n'admet pas de valeur propre, ce qui peut avoir lieu car E est un espace vectoriel réel.

E étant un espace vectoriel de dimension finie, il existe au moins un polynôme non nul, annulateur de u. Soit $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $Q(u) = 0$.

Étudions la décomposition de Q en produit de polynômes irréductibles, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$, $d^\circ P_k \in \{1, 2\}$, tel que :

$$\begin{aligned} & P_k = a_k X + b_k \ \text{ et } \ a_k \neq 0 \\ \text{ou} \quad & P_k = a_k X^2 + b_k X + c_k \ \text{ et } \ b_k - 4a_k c_k < 0. \end{aligned}$$

et il existe $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$ tels que :

$$Q = \prod_{k=1}^{q} P_k^{\alpha_k}.$$

On a alors :

$$\prod_{k=1}^{q} \left(P_k(u)\right)^{\alpha_k} = 0$$

et il existe $k_0 \in [\![1, q]\!]$ tel que $P_{k_0}(u)$ est non injectif.

> Sinon $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $P_k(u)$ est injectif, puis :
>
> $$Q(u) = \left(\prod_{k=1}^{q} P_k(u)\right)^{\alpha_k} \in \mathrm{GL}(E)$$
>
> or $Q(u) = 0$...

$P_{k_0}(u)$ étant non injectif, $\operatorname{Ker} P_{k_0}(u) \neq \{0\}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} P_{k_0}(u) \setminus \{0\}$;

Montrons que $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Si $d^\circ P_{k_0} = 1$, $\dim F = 1$.

> En effet F est alors le sous-espace propre de u attaché à la valeur propre $-\dfrac{b_{k_0}}{a_{k_0}}$.
>
> D'après les remarques préliminaires, F est stable par u.

Si $d^\circ P_{k_0} = 2$, $\dim F = 2$.

> En effet, $(x, u(x))$ est libre. Montrons-le.
>
> Si $(x, u(x))$ liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda(x)$ car $x \neq 0$.
>
> Donc $u^2(x) = \lambda^2 x$, or $x \in \operatorname{Ker} P_{k_0}(u)$, donc :
>
> $$a_k u^2(x) + b_k u(x) + c_k x = 0$$
>
> c'est-à-dire : $(a_k \lambda^2 + b_k \lambda + c_k)x = 0$ avec $x \neq 0$, ce qui donne :
>
> $$a_k \lambda^2 + b_k \lambda + c_k = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
>
> en contradiction avec $b_k^2 - 4a_k c_k < 0$.

Soit $y \in F$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = \lambda x + \mu u(x)$ alors :

$$u(y) = \lambda u(x) + \mu u^2(x).$$

Or $u^2(x) = -\dfrac{b_k}{a_k}u(x) - \dfrac{c_k}{a_k}x \in F$, ainsi $u(y) \in F$, ceci pour tout $y \in F$ et F est stable par u.

> On peut remarquer que $a_k \neq 0$ car $b_k^2 - 4a_k c_k < 0$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Ex. 26

E est un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit (P) la propriété :
«tout sous-espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u».

1) Montrer que si u est diagonalisable, alors u vérifie la propriété (P).

2) Si u vérifie (P), u est-il diagonalisable ?

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P). Soit E' un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $u_{|E'}$ vérifie aussi la propriété (P).

4) Montrer que si u vérifie (P), alors E est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2, stables par u.

5) Donner un exemple d'endomorphisme ne vérifiant pas (P).

> Si $\dim E = 1$, alors on peut remarquer que la propriété est vraie pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$. On peut supposer $n \geqslant 2$ dans tout le problème.

1)

> Bien sûr, si $F = \{0\}$ alors E est un supplémentaire de F (c'est le seul) dans E, et E est stable par u...
>
> Étudions donc le cas où $F \neq \{0\}$.

Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $u_F \in \mathcal{L}(F)$, endomorphisme de F induit par $u_{|F}$, est diagonalisable car u est diagonalisable.

> C'est un résultat du cours ; en effet, u étant diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, annulateur de u, scindé et à racines simples. Ce même polynôme P est annulateur de u_F donc u_F est diagonalisable, d'après les propriétés caractéristiques des endomorphismes diagonalisables.

Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F formée de vecteurs propres de u_F (donc de vecteurs propres de u) et soit $\mathcal{B}_E$ une base de E de vecteurs propres de u.

On peut compléter la famille libre $\mathcal{B}_F$ de E par des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ (appelons la famille correspondante $\mathcal{B}'$) pour obtenir une base $\mathcal{B}'_E$ de E ; $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}'$.

> Par application du théorème de «la base incomplète».

Soit $F' = \text{Vect}\, \mathcal{B}'$, alors F' est stable par u et $E = F \oplus F'$.

> $\mathcal{B}'$ est une famille de vecteurs propres de u, donc tout vecteur x de $\mathcal{B}'$ vérifie :
> $$u(x) = \lambda x \quad \text{où } \lambda \in \text{Sp}(u),$$
> puis tout vecteur de F' a son image dans F'.

2) Soit $n = 2$, $\beta = (e_1, e_2)$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$, telle que :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $a^2 + b^2 = +1$.

> u est une rotation vectorielle en considérant que E est euclidien et que (e_1, e_2) est une base orthonormale.

Les seuls sous-espaces vectoriels de E, stables par u, sont $\{0\}$ et E, donc tout sous-espace vectoriel de E, stable par u, admet un supplémentaire stable par u ; ainsi u vérifie la propriété (P) ; cependant, u n'est pas diagonalisable.

3) Soit E' un sous-espace vectoriel de E, stable par u.

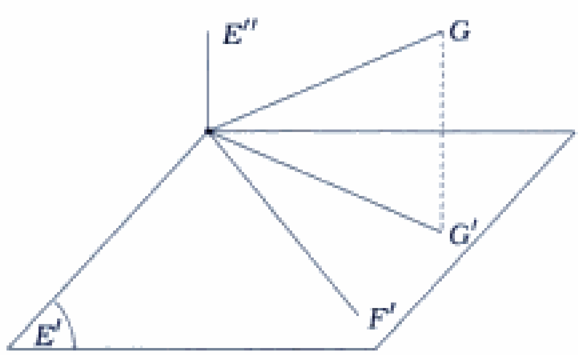
$$E' \neq \{0\}.$$

Soit F' un sous-espace vectoriel de E', stable par $u' = u_{E'}$ endomorphisme de E' induit par u.

> On peut remarquer que $u' \in \mathcal{L}(E')$. Il s'agit donc de montrer que F' admet un supplémentaire dans E', stable par u'.

E' admet, par hypothèse, un supplémentaire dans E, stable par u ; soit E'' ce supplémentaire : $E = E' \oplus E''$.

> Résumons la «situation» :



$F' \oplus E''$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, donc admet un supplémentaire G, dans E, stable par u :

$$E = G \oplus \left(F' \oplus E''\right) = G \oplus F' \oplus E''.$$

> Nous allons montrer qu'un projeté «bien choisi» de G sur E' est un supplémentaire de F' dans E', stable par u' et répond à la question.

Soit π la projection sur E' dans la direction E'', $E'' = \operatorname{Ker} \pi$ et $E' = \operatorname{Im} \pi$.

Comme $E = \left(G \oplus F'\right) \oplus E''$, π réalise un isomorphisme de $G \oplus F'$ sur E'.

> Il s'agit, bien sûr, du théorème fondamental dont on déduit le théorème du rang.

Soit $\left(e_1, e_2, \ldots, e_r\right)$ une base de G, $\left(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_q\right)$ une base de F'.

$\left(e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_q\right)$ est une base de $G \oplus F'$ donc :

$$\left(\pi\left(e_1\right), \ldots, \pi\left(e_r\right), \pi\left(e_{r+1}\right), \ldots, \pi\left(e_q\right)\right)$$

est une base de E'. Or, pour tout $i \in [\![r+1, q]\!]$, $\pi\left(e_i\right) = e_i$ car $F' \subset E' = \operatorname{Im} \pi = \operatorname{Ker}\left(\pi - \operatorname{Id}_E\right)$, ainsi $\left(\pi\left(e_1\right), \ldots, \pi\left(e_r\right), e_{r+1}, \ldots, e_q\right)$ est une base de E'.

Soit $G' = \pi(G)$, alors $G' = \operatorname{Vect}\left(\pi\left(e_1\right), \ldots, \pi\left(e_r\right)\right)$, et G' est un supplémentaire de F' dans E'.

Montrons que G' est stable par u'.

$$\forall y \in G', \exists x \in G \,/\, y = \pi(x) \text{ et } (y - x) \in E'' = \operatorname{Ker} \pi.$$

Or E'' est stable par u, donc $u(y - x) \in E''$, on obtient alors :

$$u(y - x) = u(y) - u(x) \text{ et } \pi\left(u(y) - u(x)\right) = 0,$$

et enfin :

$$\pi\left(u(y)\right) = \pi\left(u(x)\right)$$

avec $u(y) \in E'$, car $y \in G' \subset E'$ et E' stable par u, et $u(x) \in G$ car $x \in G$ est stable par u.

Ainsi $\pi\left(u(y)\right) = u(y)$ et donc $u(y) = \pi\left(u(x)\right) \in \pi(G) = G'$.

On vient de montrer que, pour tout $y \in G'$, $u(y) \in G'$; ainsi G' est stable par u donc par u', puis $u_{G'}$ vérifie (P).

4)

> Étant donné le résultat qui vient d'être montré, on va procéder, ici, par récurrence.

(i) Si $\dim E \in \left\{1, 2\right\}$, alors E est stable par u et la propriété est vérifiée.

(ii) Hypothèse de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \left\{1\right\}$, la propriété est vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égal à n.

Considérons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit E un tel espace et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant (P). D'après l'exercice précédent, il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension un ou deux, stable par u ; soit E' ce sous-espace vectoriel et E'' un supplémentaire de E' dans E stable par u.

> Il en existe car u vérifie la propriété (P).

Alors $\dim E'' \in \left\{n - 1, n\right\}$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, E'' est somme directe de sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 stables par u :

$$E'' = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i \qquad \dim E_i \in \left\{1, 2\right\}$$

$$\text{et} \quad E = E' \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{q} E_i\right) \qquad \text{avec } \dim E' \in \left\{1, 2\right\}$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$.

(iii) On en déduit, d'après le principe de récurrence, que tout espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, vérifiant (P), est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2, stables par u.

5) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$M_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

0 est valeur propre triple de u et $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.

Il n'existe pas de sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et stable par u ; en effet, si $E = \operatorname{Ker} u \oplus E'$, avec E' stable par u, alors $\dim E' = 1$ et $u_{E'}$ est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc λ est valeur propre de u. Par suite $\lambda = 0$, puis $E' \subset \operatorname{Ker} u$, en contradiction avec ce qui précède.

Ex. 27

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisable. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.

(i) il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $(v, f(v), \dots, f^{(n-1)}(v))$ est une base de $\mathbb{R}^n$;

(ii) f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

On peut remarquer que si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable ; la réciproque est, bien sûr, fausse.

L'hypothèse f diagonalisable est donc certainement indispensable pour montrer que (i) entraîne (ii).

En effet, soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme nilpotent d'indice n (c'est-à-dire $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$), alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Ker} g^{n-1}$, $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors que g admet 0 pour unique valeur propre.

Pour montrer que (i) entraîne (ii), faisons tout de suite intervenir l'hypothèse f diagonalisable.

Soit donc $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f et $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (qui existe d'après l'hypothèse).

Il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

et pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $f^j(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j v_k$ où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, λ_k est la valeur propre attachée au vecteur propre v_k.

$$\det_B\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)=\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \ldots & \lambda_1^j x_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1}x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & & \lambda_2^j x_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_k & \lambda_k x_k & & \lambda_k^j x_k & \ldots & \lambda_k^{n-1}x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & & \lambda_n^j x_n & & \lambda_n^{n-1}x_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots\ldots & \vdots\ldots & \lambda_k^j & \ldots\vdots \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde attaché aux n réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Donc $\det_B\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)=\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)$.

Or $\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, donc :

$$\det_B\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)\neq 0$$

ce qui entraîne :

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\neq 0.$$

Ainsi :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \left(i\neq j\ \Rightarrow\ \lambda_i\neq\lambda_j\right).$$

Les n valeurs propres de f sont donc deux à deux distinctes.

Réciproquement, si les n valeurs propres de f sont deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable et soit $B=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$ une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de f et :

$$v=\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Alors :

$$\det_B\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^j & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^j & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^j & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

or $i\neq j\ \Rightarrow\ \lambda_i\neq\lambda_j$ donc $\det_B\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)\neq 0$ et, par suite, $\left(v,f(v),\ldots,f^{n-1}(v)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Ex. 28

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$ une base de E et $f\in\mathcal{L}(E)$ admettant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si $x\in E$, on note $E(x)=\mathrm{Vect}\left(f^k(x),k\in\mathbb{N}\right)$.

Trouver les vecteurs x de E tels que $E(x)\neq E$.

> On peut remarquer que si une droite vectorielle $\mathbb{R}x$ est stable par f, alors :
> $$\text{Vect}\left(x, f(x), f^2(x)\right) = \mathbb{R}x \neq E.$$
> Donc si x est vecteur propre de f, alors $E(x) \neq E$.
>
> De façon analogue, si P est un plan de E stable par f, alors pour tout x de P :
> $$\text{Vect}\left(x, f(x), f^2(x)\right) \subset P.$$
> Donc $E(x) \neq E$.
>
> Nous n'allons pas, a priori, chercher les plans de E stables par f, mais étudier les droites de E stables par f.

Cherchons les éléments propres de f.

Le polynôme caractéristique de f est :

$$-X^3 + 3X^2 + 4X - 12 = -(X-2)(X+2)(X-3).$$

On a donc $\text{Sp}(f) = \{2, -2, 3\}$.

Admettant trois valeurs propres simples, f est diagonalisable, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles :

$$\text{Ker}\left(f - 2\,\text{Id}_E\right) = \text{Vect}\left(-6e_1 - e_2 + e_3\right)$$
$$\text{Ker}\left(f + 2\,\text{Id}_E\right) = \text{Vect}\left(6e_1 - 5e_2 + e_3\right)$$
$$\text{Ker}\left(f - 3\,\text{Id}_E\right) = \text{Vect}\left(-4e_1 + e_3\right)$$

Posons :

$$e'_1 = -6e_1 - e_2 + e_3$$
$$e'_2 = 6e_1 - 5e_2 + e_3$$
$$e'_3 = -4e_1 + e_3$$

$\mathcal{B}' = \left(e'_1, e'_2, e'_3\right)$ est une base de vecteurs propres de E.

> Peu importe les valeurs numériques choisies pour e'_1, e'_2, e'_3 ; l'important est de travailler dans une base de vecteurs propres de E.

Pour tout $x \in E$, il existe un unique triplet $\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3$$

alors :

$$f(x) = 2\,\alpha_1\, e'_1 - 2\,\alpha_2\, e'_2 + 3\,\alpha_3\, e'_3$$
$$f^2(x) = 4\,\alpha_1\, e'_1 + 4\,\alpha_2\, e'_2 + 9\,\alpha_3\, e'_3$$

$$\det_{\mathcal{B}'}\left(x, f(x), f^2(x)\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 & 4\alpha_1 \\ \alpha_2 & -2\alpha_2 & 4\alpha_2 \\ \alpha_3 & 3\alpha_3 & 9\alpha_3 \end{vmatrix}$$
$$= \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -20\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,.$$

> On peut aussi remarquer que :
> $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$
> $$= \text{Vandermonde}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$$
> les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant deux à deux distincts, le déterminant est non nul.

Ainsi $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E si et seulement si $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \neq 0$, donc si $E(x) \neq E$, on a nécessairement $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0$. D'autre part, il est évident que cette condition est suffisante.

Par suite, les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$ sont les vecteurs de :

$$\left(\operatorname{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right)\right) \cup \left(\operatorname{Ker}\left(f + 2\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right)\right)$$
$$\cup \left(\operatorname{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_E\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)\right).$$

> On peut maintenant remarquer que l'on a ainsi «retrouvé» les trois droites sous-espaces propres et les plans stables de E par f.

Ex. 29

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $f^3 + f = 0$ et $\operatorname{rg}(f) = 2$.

1) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

2) Déterminer le commutant de f.

1) ▪ Recherche des droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$.

La droite $\mathbb{R}x$ est stable par f si et seulement si x est un vecteur propre de f.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine de tout polynôme annulateur de f donc, en particulier, du polynôme $X^3 + X$. Or l'unique racine réelle de $X^3 + X$ est 0, donc $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0\}$.

De plus $\operatorname{rg}(f) = 2$. En appliquant le théorème du rang à $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, on obtient $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ donc 0 est valeur propre de f et $\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$.

Il existe donc une unique droite stable : c'est la droite $\operatorname{Ker} f$.

▪ Recherche des plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f

Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f ; alors $f_{|P}$ induit un endomorphisme f_P de P ; le polynôme $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f_P et est donc un multiple du polynôme minimal $M \in \mathbb{R}[X]$ de f_P (donc $d^\circ M \leq \dim P = 2$).

> Le degré de tout polynôme minimal est supérieur ou égal à 1.

En résumé : $\begin{cases} M \in \mathbb{R}[X] \\ M \mid X^3 + X \\ d^\circ M \in \{1, 2\} \\ M \text{ est unitaire} \end{cases}$

Par suite $M \in \{X, X^2 + 1\}$.

Si $M = X$, alors $M(f_P) = 0 = f_P$ ce qui est contraire à $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Si $M = X^2 + 1$, alors $M(f_P) = 0 = f_P^2 + \mathrm{Id}_P$.

Montrons que $P = \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$. En effet :

$$\forall x \in P,\ \underbrace{\left(f_P^2 + \mathrm{Id}_P\right)(x)}_{=(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(x)} = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$, par suite $P \subset \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

D'après le théorème de décomposition des noyaux appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et aux polynômes premiers entre eux, X et X^2+1, on a :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$$

donc $\dim \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = 2$ et $P = \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

Il existe donc un unique plan stable : c'est le plan $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

- Bien sûr $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par f.

2) Recherche du commutant de f

Notons-le $C(f)$.

> Il s'agit d'abord de déterminer une base adaptée aux propriétés de f.

Soit $e_1 \in \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$, $e_1 \neq 0$, alors $\left(e_1, f(e_1)\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

> En effet, comme $e_1 \neq 0$, si $\left(e_1, f(e_1)\right)$ est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$. Donc :
>
> $$f^2(e_1) = \lambda^2 e_1.$$
>
> Or $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, ainsi :
>
> $$-e_1 = \lambda^2 e_1 \iff (\lambda^2+1)e_1 = 0 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } e_1 \neq 0,$$
>
> ce qui n'est pas possible ; donc $\left(e_1, f(e_1)\right)$ est une famille libre de cardinal 2 du plan vectoriel $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_E\right)$.

Soit $e_2 \in \operatorname{Ker} f$, $e_2 \neq 0$.

Alors $\mathcal{B} = \left(e_1, f(e_1), e_2\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) \oplus \operatorname{Ker} f$:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part : $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ sont stables par tout élément g de $C(f)$.

> $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ est stable par g car f et g commutent, donc $\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ et g commutent aussi.
>
> *Rappel.* Soit u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel ; si u et v commutent alors $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

Donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g \circ f = f \circ g \iff & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \delta = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi f et g commutent si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(g) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \alpha I_3 + (\lambda - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est la traduction matricielle dans la base $\mathcal{B}$ de :

$$g = \alpha \, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\lambda - \alpha)\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + f^2\right) + \beta f \quad \text{donc} \quad g \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right).$$

> En effet, $M_{\mathcal{B}}\left(f^2\right) = \left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc :
>
> $$M_{\mathcal{B}}\left(f^2 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En remarquant que $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right) \subset C(f)$, on obtient $g \in C(f)$ si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right)$, donc :

$$C(f) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right).$$

Ex. 30

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Déterminer le commutant de A, $C(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\right\}$ et montrer que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A.

2) Trouver les droites et les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Le polynôme caractéristique de A est $(1 - X)(3 - X)^2$.

a) ▪ 1 est valeur propre simple

> Donc $\mathrm{Ker}\left(A - I_3\right)$ est une droite vectorielle.

Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on remarque que $(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc :

$$\mathrm{Ker}\left(A - I_3\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▪ 3 est valeur propre double

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim \mathrm{Ker}\left(A - 3I_3\right) = 1$ et A n'est pas diagonalisable.

> ▪ $\dim \mathrm{Ker}\left(A - 3I_3\right) = 1$: il s'agit de l'application du théorème du rang à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $f - 3\,\mathrm{Id}_E$ dont le rang est 2.
>
> ▪ Bien sûr, d'après la caractérisation des endomorphismes diagonalisables, s'il existe une valeur propre dont l'ordre (de multiplicité) est strictement supérieur à la dimension du sous-espace propre correspondant, cet endomorphisme n'est pas diagonalisable.

$\left(A - 3I_3\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A - 3I_3\right)$ qui est une droite vectorielle, ainsi :

$$\mathrm{Ker}\left(A - 3I_3\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est en remarquant que $C_1 + C_2 = 0$ dans la matrice $(A - 3I_3)$ (où C_i est la i^e colonne, $i \in [\![1, 3]\!]$, que l'on obtient ce vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer les matrices M qui commutent avec A, il suffit de déterminer les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ; or f et g commutent si et seulement si leurs matrices dans une base (et alors dans toute base) de $\mathbb{R}^3$ commutent.

Un premier objectif est donc de déterminer une base β' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est «simple», par exemple triangulaire supérieure avec «le plus de zéros» possible.

Un second objectif est d'étudier la matrice de g dans cette base.

b) (i) Recherche d'une base β'

Comme premier vecteur de β', choisissons e'_1, vecteur propre attaché à la valeur propre 1.
Pour deuxième vecteur de β', choisissons e'_2, vecteur propre attaché à la valeur propre 3.

Par exemple, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique :

$$e'_1 = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad e'_2 = e_1 + e_2 .$$

Un calcul élémentaire montrerait que (e'_1, e'_2) est libre, mais c'est *inutile*. En effet, e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs propres attachés à deux valeurs propres distinctes donc forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

D'autre part, ce qui *importe*, c'est que e'_1 et e'_2 soient deux vecteurs propres, attachés à deux valeurs propres distinctes, les valeurs choisies n'ont aucune importance dans le raisonnement, à moins que le choix de e'_3 «perturbe» celui de e'_2...

À présent, choisissons e'_3.

D'après le théorème de décomposition des noyaux appliqué aux polynômes premiers entre eux $(X-1)$ et $(X-3)^2$ vérifiant :

$$\chi_A(X) = -(X-1)(X-3)^2.$$

et χ_A étant un polynôme annulateur de f,

Il s'agit du théorème de Cayley-Hamilton.

on a :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2.$$

(e'_1) étant une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et (e'_2) une base de $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \subsetneq \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$, il s'agit donc de compléter (e'_2) pour obtenir une base de $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$, puis de $\mathbb{R}^3$, adaptée à cette décomposition en somme directe.

Soit $e'_3 \in \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \setminus \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, alors :

$$\left(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)(e'_3) \neq 0 \quad \text{et} \quad \left(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2(e'_3) = 0.$$

Donc, en posant $e'_2 = (f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(e'_3)$, on a :

$$e'_2 \in \operatorname{Ker}\left(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) \setminus \{\vec{0}\}$$

et (e'_2, e'_3) est une base de $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$.

Soit $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\operatorname{Ker}\left(A-3I_3\right)^2=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Choisissons $e'_3=e_3$, alors :

$$e'_2=e_1+e_2=\left(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)\left(e'_3\right)$$

et avec, par exemple, $e'_1=e_1-e_2$, $\beta'=\left(e'_1,e'_2,e'_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$M_{\beta'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}=A'.$$

> Étudions plus particulièrement la 3^e colonne : il s'agit des coordonnées de $f\left(e'_3\right)$ dans la base $\left(e'_1,e'_2,e'_3\right)$.
> Or $\left(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)\left(e'_3\right)=e'_2$, donc $f\left(e'_3\right)=3e'_3+e'_2$, d'où le résultat.

En posant $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$A'=P^{-1}AP.$$

(ii) Soit $g\in C(f)$, commutant de f, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$, $\left(f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^\alpha$ et g commutent donc $\operatorname{Ker}\left(f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^\alpha$ est stable par g.

C'est le cas, en particulier, pour :

$$\alpha=1 \text{ et } \lambda=1.$$

$$\alpha\in\{1,2\} \text{ et } \lambda=3.$$

La droite vectorielle $\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)=\mathbb{R}\left(e_1-e_2\right)$ étant stable par g, le vecteur $e'_1=e_1-e_2$ est un vecteur propre de g.

De même, la droite vectorielle $\operatorname{Ker}\left(f-3\,\mathrm{Id}_E\right)=\mathbb{R}\left(-e_1+e_2\right)$ étant stable par g, le vecteur $e'_2=e_1+e_2$ est un vecteur propre de g.

Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$g\left(e'_1\right)=\lambda e_1 \quad\text{et}\quad g\left(e'_2\right)=\mu e'_2.$$

D'autre part, $\operatorname{Ker}\left(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2$ est stable par g.

Or $\operatorname{Ker}\left(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)^2=\operatorname{Vect}\left(e'_2,e'_3\right)$, donc :

$$\exists(\nu,\xi)\in\mathbb{R}^2\,/\,g\left(e'_3\right)=\xi e'_2+\nu e'_3$$

et donc :

$$M_{\beta'}(g)=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&\xi\\0&0&\nu\end{pmatrix}.$$

Soit $C\left(A'\right)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A' ; alors $M'\in C\left(A'\right)$ si et seulement si $A'M'=M'A'$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&\xi\\0&0&\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&\xi\\0&0&\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&3\mu&3\,\xi+\nu\\0&0&3\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&3\mu&\mu+3\xi\\0&0&3\nu\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow 3\,\xi+\nu=\mu+3\xi$$

$$\Longleftrightarrow \mu=\nu$$

donc :

$$C(A') = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \xi \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, (\lambda, \mu, \xi) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda\ \mu\ \nu \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Ainsi $C(A')$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

> En effet :
>
> $$C(A') = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M'_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M'_3} \right)$$
>
> Donc ces trois matrices (M'_1, M'_2, M'_3) forment une famille génératrice de $C(A')$.
> Or (M'_1, M'_2, M'_3) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

Donc $C(f)$, ensemble des morphismes de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ qui commutent avec f, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, de dimension 3.

> En effet, $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base β', l'application :
>
> $$\Psi \ :\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), h \mapsto \mathrm{mat}_{\beta'}\, h$$
>
> est un isomorphisme d'espaces vectoriels et l'image par Ψ de $C(f)$ est $C(A')$.

Or $C(f)$ contient aussi $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right)$ et $(f - 3\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) \neq 0$.

> *Sans calcul*, même si, à ce niveau, un calcul est élémentaire...
> Car si $(f - 3\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0$, alors le polynôme $(X-3)(X-1)$ serait annulateur de f, scindé et à racines simples, et f serait diagonalisable.

Il n'existe donc aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à 3, annulateur de f : le polynôme minimal de f est $(-1)^3\,\chi_A$, et on en déduit que $\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Alors $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right)$ est de dimension 3 comme $C(f)$; de plus, $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right) \subset C(f)$, donc :

$$C(f) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\right).$$

> On peut considérer à nouveau l'isomorphisme :
>
> $$\psi \ :\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), h \mapsto \mathrm{mat}_{\beta'}\, h$$
>
> pour en déduire $C(A)$.

Donc :

$$C(A) = \mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)$$
$$= \left\{P(A), P \in \mathbb{R}_2[X]\right\}.$$

> On peut remarquer que :
>
> $$\left\{P(A), P \in \mathbb{R}_2[X]\right\} = \left\{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\right\}$$

2) (i) Une droite de $\mathbb{R}^3$ est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

Il y a donc deux droites stables par f :

- la droite $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_E) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(ii) Soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par f, alors f induit un endomorphisme f_F de F et le polynôme $\chi_A = (1-X)(3-X)^2$ est un polynôme annulateur de f donc de f_F.

Par suite, le polynôme minimal de f_F est de degré 2 et égal à $(1-X)(3-X)$, ou à $(3-X)^2$.

> En effet, le polynôme minimal M_{f_F} de f_F est un diviseur non constant de χ_A et de degré inférieur ou égal à 2.
> Les cas :
> $$M_{f_F} = X - 1$$
> $$\text{et} \qquad M_{f_F} = X - 3$$
> sont à rejeter car f_F n'est pas une homothétie, puisque f n'admet pas de sous-espace propre de dimension $\geqslant 2$.
> Il reste donc :
> $$M_{f_F} = (X-1)(X-3) \text{ ou } (X-3)^2$$
> et le polynôme caractéristique de f_F est égal à son polynôme minimal.

- Si le polynôme caractéristique de f_F est $(X-1)(X-3)$, alors f_F est diagonalisable et :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_E) \\ &= \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Une équation de F dans la base (e_1, e_2, e_3) est $z = 0$.

- Si le polynôme caractéristique de f_F est $(X-3)^2$, alors :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_E)^2 \\ &= \operatorname{Vect}(e_1 + e_2, e_3). \end{aligned}$$

Une équation de F dans la base (e_1, e_2, e_3) est $x - y = 0$.

Ex. 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K)$. On pose $C = AB - BA$; montrer que si C est colinéaire à A alors C est nilpotente.

1) D'abord, si A et B commutent, alors $C = 0$ et C est bien sûr nilpotente.

2) Dans les autres cas, par hypothèse, il existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tel que $AB - BA = \lambda A$.

> Montrer alors que C est nilpotente est équivalent à montrer que A est nilpotente.
> On est donc amené à étudier A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Étude de $A^kB - BA^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

> On remarque que :
> $$\begin{aligned} A^2B - BA^2 &= A(BA + \lambda A) - BA^2 \\ &= (AB - BA)A + \lambda A^2 \\ &= 2\lambda A^2 \end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k B - BA^2 = k\,\lambda\, A^k.$$

La propriété est amorcée pour $k = +1$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre k, ($k \in \mathbb{N}^*$), on obtient :

$$\begin{aligned}
A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A^k(BA + \lambda A) - BA^{k+1} \\
&= \left(A^k B - BA^k\right)A + \lambda A^{k+1} \\
&= \lambda k A^k \times A + \lambda A^{k+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \lambda(k+1)A^{k+1}
\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k B - BA^k = k\,\lambda\, A^k.$$

3) Pour démontrer que C est nilpotente, nous allons appliquer deux raisonnements différents.

- 1^re^ méthode

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K),\ M \mapsto MB - BM$.

D'après le résultat précédent :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(A^k\right) = k\,\lambda\, A^k.$$

Si on suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \neq 0$, alors cette écriture signifie que A^k est un vecteur propre de φ attaché à la valeur propre $k\lambda$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; or $\lambda \neq 0$, on obtient alors une infinité de valeurs propres, ce qui est en contradiction avec $\dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$ (et donc $\operatorname{Card} \operatorname{Sp}(A) \leqslant n^2$).

Il existe donc $k \in [\![1, n^2]\!] \,/\, A^k = 0$.

Donc A est nilpotente et, d'après les propriétés des matrices nilpotentes d'ordre n, il existe $k \in [\![1, n]\!] \,/\, A^k = 0$.

- 2^e^ méthode

Cette méthode n'utilise pas l'endomorphisme φ, mais une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(K)$.

On considère $\mathcal{M}_n(K) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \| M \|$, une norme sur l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. Donc :

$$\left\| k\,\lambda\, A^k \right\| = |\lambda|\, k \left\| A^k \right\| \leqslant 2\| B \| \left\| A^k \right\|.$$

Si $\left\| A^k \right\| \neq 0$, alors $|\lambda|\, k \leqslant 2\| B \|$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec le choix de $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > E\left(\dfrac{2\| B \|}{\lambda}\right) + 1$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $A^k = 0$ et A est donc nilpotente.

Ex. 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ($n \in \mathbb{N}^*$), et $\chi_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A.

1) Montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ (n-k)a_k + \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} \operatorname{Tr}\left(A^j\right) = 0.$$

2) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists p \in \mathbb{N},\ A^p = 0$;

(ii) $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$.

1) Soit $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A, alors $a_n = (-1)^n$ et soit $C(X)$ la matrice ${}^t\mathrm{Com}(A - XI_n)$; $C(X)$ est une matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc :

$$C(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k \quad \text{où} \quad C_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et on a :

$$C(X)\big(A - XI_n\big) = \Big(\det\big(A - XI_n\big)\Big) I_n. \tag{1}$$

> En effet, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ${}^t\mathrm{Com}(B) \cdot B = (\det B) I_n$, donc en particulier pour $B = A - \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi :
> $$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \Big({}^t\mathrm{Com}\big(A - \lambda I_n\big)\Big)\big(A - \lambda I_n\big) = \det\big(A - \lambda I_n\big) I_n\,.$$
> Cette relation entre matrices à coefficients complexes donne la relation (1).

La relation (1) s'écrit aussi

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k\right)\big(A - XI_n\big) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) I_n$$

$$C_0 A + \sum_{k=1}^{n-1}\big(C_k A - C_{k-1}\big) X^k - C_{n-1} X^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) I_n$$

> L'unicité d'écriture d'un polynôme à coefficients matriciels dans la base canonique $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ se justifie comme l'unicité d'écriture d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.

donc :

$$\begin{cases} C_0 A = a_0 I_n \\ C_k A - C_{k-1} = a_k I_n \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!] \\ -C_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$

$$\iff (2) \begin{cases} -C_{n-1} = (-1)^n I_n \\ -C_{n-2} = a_{n-1} I_n + a_n A \quad (\text{avec } a_n = (-1)^n) \\ \quad\vdots \\ -C_k = a_{k+1} I_n + a_{k+2} A + \ldots + a_n A^{n-k-1} \\ \quad\vdots \\ -C_0 = a_1 I_n + A_2 A + \ldots + a_n A^{n-1} \\ 0 = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n \end{cases}$$

> La dernière relation est $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$ c'est-à-dire $\chi_A(A) = 0$.
>
> C'est une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Dérivons le polynôme caractéristique :

$$\det\left(A - XI_n\right).$$

> Nous appliquons une généralisation du théorème de Leibniz, le déterminant étant une forme n-linéaire (alternée).

On obtient :

$$\chi_A'(X) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}-X & & 0 & & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & 0 & & a_{2j} & & a_{2n} \\ a_{31} & \ddots & 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & & -1 & \dots & a_{kj} & \dots\ \dots & a_{kn} \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & a_{jj}-X & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nj} & & a_{nn}-X \end{vmatrix}$$

> En développant $\Delta_k(X)$ selon la k ième colonne, on obtient :
>
> $$\Delta_k(X) = (-1) \times \left(\text{cofacteur de } a_{kk} - X \text{ dans } \det\left(A - XI_n\right)\right.$$
>
> ce cofacteur est situé à l'intersection de la k ième ligne, k ième colonne de la matrice :
>
> $$\operatorname{com}\left(A - XI_n\right)$$
>
> donc à l'intersection de la k ième ligne, k ième colonne de :
>
> $${}^t\operatorname{com}\left(A - XI_n\right) = C(X).$$

On en déduit :

$$\chi_A'(X) = -\operatorname{Tr}\left(C(X)\right)$$

mais on a aussi :

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

puis :

$$\chi_A'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Tr}\left(C_k\right) X^k.$$

D'après l'unicité d'écriture d'un polynôme dans la base canonique, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ k a_k = -\operatorname{Tr}\left(C_{k-1}\right). \qquad (3)$$

En posant $C_{-1} = 0$, on obtient

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ -C_{k-1} = a_k I_n + \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} A^j.$$

Pour $k = n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{k+j}A^j = 0$.

On obtient, avec (3), en prenant les traces :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad -\operatorname{Tr}\left(C_{k-1}\right) = na_k + \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} \operatorname{Tr}\left(A^j\right)$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!], (n-k)a_k + \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} \operatorname{Tr}\left(A^j\right) = 0 \tag{4}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -a_{n-1} = a_n \operatorname{Tr}(A) \\ -2a_{n-2} = a_{n-1} \operatorname{Tr}(A) + a_n \operatorname{Tr}\left(A^2\right) \\ \quad \ldots\ldots \\ -na_0 = a_1 \operatorname{Tr}(A) + a_2 \operatorname{Tr}\left(a^2\right) + \cdots + a_n \operatorname{Tr}\left(A^n\right) \end{cases}$$

La traduction matricielle est :

$$-\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ 2a_{n-2} \\ \vdots \\ na_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \operatorname{Tr} A \\ \operatorname{Tr}\left(A^2\right) \\ \vdots \\ \operatorname{Tr}\left(A^n\right) \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} a_n & & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & a_n & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

avec $a_n = (-1)^n$ donc P est inversible, et, par suite, $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ si et seulement si $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$, alors A est nilpotente.

Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ est équivalent à $A^n = 0$ (avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ et comme le corps est $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (-1)^n X^n$.

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$, donc $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Réciproquement, si $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$ et le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n.$$

On en déduit, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, donc A est nilpotente.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) peut se montrer par trigonalisation de A. En effet, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^P = 0$ alors $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ et A étant trigonalisable, il existe :

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \;/\; T = U^{-1}AU \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 0 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = UT^kU^{-1} \quad \text{puis} \quad tr\left(A^k\right) = 0.$$

(Propriété de la trace de deux matrices semblables.)

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Endomorphismes cycliques Théorème de Cayley-Hamilton

Dans tout le problème, on désigne par E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et par f un endomorphisme de E. On note alors :

- $P_f(X) = \det\left(f - X\,\mathrm{Id}\right)$ le polynôme caractéristique de f ;
- $M_f(X)$ le polynôme minimal de f (choisi unitaire par définition) ;
- $E(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour $x \in E$.

On dit que f est un endomorphisme cyclique s'il existe $x_0 \in E$ tel que $E\left(x_0\right) = E$.

I – Étude des sous-espaces $E(x)$ pour $x \in E$, $x \neq 0_E$

1) Montrer que $E(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f.

2) Que peut-on dire de f si $\dim E(x) = 1$ pour tout vecteur non nul x de E ?

3) Justifier l'existence de l'entier :

$$k = \max\left\{m \geqslant 1 \mid \text{ la famille } \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{m-1}(x)\right) \text{ est libre}\right\}.$$

Prouver, pour tout entier $p \geqslant k$, que $f^p(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$.

En déduire que $\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$ est une base de $E(x)$ et donc que $\dim E(x) = k$.

4) On suppose que f est un endomorphisme cyclique, et que x_0 est un vecteur tel que :

$$E\left(x_0\right) = E.$$

Prouver que la famille $\left(x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ est une base de E.

II – Quelques propriétés des endomorphismes cycliques

On suppose que f est un endormorphisme cyclique, et x_0 un vecteur tel que $E\left(x_0\right) = E$.

On rapporte alors l'espace E à la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), f^2\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ et on pose :

$$f^n\left(x_0\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(x_0\right).$$

(Dans la suite, on reprendra ces notations lorsque f est cyclique.)

5) Écrire la matrice M de f dans la base $\left(x_0, f\left(x_0\right), f^2\left(x_0\right), \ldots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$ et déterminer $P_f(X)$.

6) Établir l'indépendance linéaire des endomorphismes $\mathrm{Id}, f, f^2, f^3, \ldots, f^{n-1}$ et déterminer $M_f(X)$.

Quelle relation en déduit-on entre ces polynômes P_f et M_f ?

(On n'utilisera pas le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer cette relation.)

III – Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

7) On suppose que f est un endomorphisme cyclique. Établir que $P_f(f) = 0$.

8) On suppose que f est un endomorphisme quelconque de E.

a) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, non réduit à $\{0\}$, démontrer que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f_F induit par f divise le polynôme caractéristique P_f de f.

b) Montrer, pour tout vecteur non nul x appartenant à E, que f induit un endomorphisme cyclique du sous-espace $E(x)$ et que $P_f(f)(x) = 0_E$.

En déduire que $P_f(f) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).

IV – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables parmi les cycliques

On suppose dans cette question que f est cyclique.

Établir que f est diagonalisable si et seulement si il a n valeurs propres distinctes.

V – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les diagonalisables

On suppose dans cette question que f est diagonalisable et on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f.

9) Déterminer le polynôme minimal M_f de f et en déduire que la famille $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.

10) Établir, si $p = n$, que $E = E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

11) Déduire des résultats précédents que f est cyclique si et seulement si $p = n$.

VI – Étude du commutant de f lorsque f est cyclique

On suppose dans cette question que f est cyclique et que $E(x_0) = E$.

12) Si u et v commutent avec f, montrer que $u = v$ si et seulement si $u(x_0) = v(x_0)$.

13) En déduire que le commutant $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ de f est un espace vectoriel de dimension n dont une base est $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

VII – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les nilpotents

On suppose dans cette question que u est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

14) Établir l'existence d'un vecteur x_0 appartenant à E tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre et en déduire que l'indice de nilpotence p est inférieur ou égal à n.

Lorsque $p = n$, écrire la matrice de u dans la base $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$.

15) Établir que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

VIII – Caractérisation d'un endomorphisme cyclique par son polynôme minimal

16) On suppose que λ est un scalaire et u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme $f = \lambda\,\mathrm{Id} + u$.

17) On suppose l'espace E somme directe de sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ stables par f et on note $M_1, \dots, M_p$ les polynômes minimaux des endomorphismes qu'induit f sur $F_1, \dots, F_p$. Exprimer le polynôme minimal M_f de f en fonction de $M_1, M_2, \dots, M_p$.

18) On considère un endomorphisme scindé (c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est scindé) tel que :

$$M_f(X) = (-1)^n P_f(X) = \left(X - \lambda_1\right)^{r_1} \dots \left(X - \lambda_p\right)^{r_p} = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (i \neq j \ \Rightarrow\ \lambda_i \neq \lambda_j)$$

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ r_i \in \mathbb{N}^*.$$

Établir qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

19) Établir que la matrice M de la question II.5), dont on suppose le polynôme caractéristique scindé, est semblable à cette matrice A, et en déduire qu'un endomorphisme scindé f, de polynômes minimal M_f et caractéristique P_f, est cyclique si et seulement si $M_f = (-1)^n P_f$.

IX – Forme de Frobénius d'une matrice, forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

20) Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer que $\mathcal{I}_x = \left\{P \in K[X] \mid P(f)(x) = 0_E\right\}$ est un idéal de $K\left[X\right]$, non réduit à $\left\{0\right\}$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire M_x tel que $\mathcal{I}_x = M_x K\left[X\right]$.

21) Montrer qu'il existe un vecteur non nul y de E tel que $M_y = M_f$.

22) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ tels que E est somme directe de sous-espaces de la forme $E\left(x_1\right), E\left(x_2\right), \dots, E\left(x_p\right)$ et, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $M_{x_{i+1}}$ divise M_{x_i}. Préciser la matrice que l'on en déduit pour f dans une base convenable de E.

23) En déduire, si u est nilpotent, qu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice $U = \left(u_{i,j}\right)$ est de Jordan, c'est-à-dire avec des éléments nuls à l'exception des $u_{i,i+1}$ égaux à 0 ou 1 ($1 \leqslant i < n$).

X – Un exemple

Soit p un entier strictement supérieur à 2. On prend $K = \mathbb{R}$ et $\dim E = 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^p = \mathrm{Id}$ et $f^k \neq \mathrm{Id}$ pour tout $1 \leqslant i < p$.

Prouver que, pour tout vecteur non nul v de E, $\left(v, f(v)\right)$ est une base de E (ce qui établit que f est cyclique) et montrer que la matrice de f est alors de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\dfrac{2k\pi}{p} \end{pmatrix}.$$

avec $1 \leqslant k < p$ et $\mathrm{PGCD}(k, p) = 1$.

En déduire le nombre d'endomorphismes f qui vérifient les conditions imposées.

Solution

I – Étude des sous-espaces $E(x)$ pour $x \in E$, $x \neq 0_E$

1) Par définition même, $E(x)$ est un sous-espace vectoriel de E.

> C'est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Montrons que $E(x)$ est stable par f.

Soit $y \in E(x)$: $\exists p \in \mathbb{N}$ et :

$$\left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\right) \in K^{p+1} \;/\; y = \sum_{q=0}^{p} \lambda_q f^q(x)$$

donc $f(y) = \displaystyle\sum_{q=0}^{p} \lambda_q f^{q+1}(x)$; ainsi $f(y) \in E(x)$ pour tout y de $E(x)$: $E(x)$ est stable par f.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant x, alors F contient $f(x)$ puis (par récurrence) F contient $f^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc F contient $E(x)$.

En conclusion, $E(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant x et stable par f.

2) Si $\dim E(x) = 1$, alors $f(x)$ et x sont colinéaires et il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soit x non nul et $y \in Kx$ alors il existe $\lambda_y \in K$ tel que $f(y) = \lambda_y y$ et il existe $\mu \in K$ tel que $y = \mu x$, donc $f(y) = \lambda_y \, \mu \, x$; on a aussi :

$$f(y) = \mu f(x) = \mu \, \lambda_x \, x$$

donc $\left(\lambda_y - \lambda_x\right) \mu \, x = 0$, or $x \neq 0$, donc $\left(\lambda_y - \lambda_x\right)\mu = 0$. Si $y \neq 0$ alors $\mu \neq 0$ et on obtient $\lambda_y = \lambda_x$ donc $f(y) = \lambda_x y$; cette relation étant encore vérifiée lorsque $y = 0$, $f_{|Kx}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_x.

Considérons $y \in E$ tel que (x, y) soit libre, alors $f_{|Ky}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_y et de même $f_{|K(x+y)}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ_{x+y}.

> Bien sûr, $f_{|Kx}$ est la restriction de f à Kx.

Donc $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$, or $f \in \mathcal{L}(E)$ donc :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

ainsi :

$$\left(\lambda_{x+y} - \lambda_x\right)x + \left(\lambda_{x+y} - \lambda_y\right)y = 0$$

et puisque (x, y) est libre, il vient $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, et enfin : $\lambda_x = \lambda_y$.

En posant $\lambda_x = \lambda$, on obtient : $\forall x \in E, f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie vectorielle.

3) Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, la famille (x) est libre.

Soit $\mathcal{N} = \left\{m \in \mathbb{N}^* \;/\; \left(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\right) \text{ est libre}\right\}$, alors :

$$\mathcal{N} \begin{cases} \text{est une partie de } \mathbb{N} \\ \text{non vide car } 1 \in \mathcal{N} \\ \text{majorée par } n = \dim E \end{cases}$$

> En effet, si $\mathcal{L}$ est une partie libre de E, K-espace vectoriel de dimension n, alors $\operatorname{Card} \mathcal{L} \leqslant n$.

Donc $\mathcal{N}$ admet un plus grand élément ; soit k cet élément, on a :

$$\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)\right) \text{ libre}$$

$$\text{et} \quad \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x), f^k(x)\right) \text{ liée.}$$

Donc $f^k(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $p \geqslant k$:

$$f^q(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}\right).$$

(i) On vient de voir que cette propriété est vraie pour $p = k$.

(ii) Hérédité. Soit $p \geqslant k$ tel que :

$$f^p(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right).$$

$$\text{Alors} \quad f^{p+1}(x) \in \operatorname{Vect}\left(f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x)\right),$$

$$\text{or comme} \quad f^k(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right),$$

$$\text{on a} \quad f^{p+1}(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right).$$

Donc si la propriété est vraie à l'ordre p, elle l'est à l'ordre $p+1$.

(iii) D'après le principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left(p \geqslant k \Rightarrow f^p(x) \in \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)\right).$$

Donc $\operatorname{Vect}\left(f^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}} = \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$, c'est-à-dire :

$$E(x) = \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)\right)$$

et cette famille étant libre, c'est une base de $E(x)$ et $\dim E(x) = k$.

4) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right)$ est une base de $E(x_0)$; or $E(x_0) = E$, donc $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right)$ est une base de E et comme $\dim E = n$, on obtient $k = n$ et :

$$\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right) \text{ est une base de } E.$$

II – Quelques propriétés des endomorphismes cycliques

5) La matrice de f dans la base $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \ldots & a_0 \\ 1 & -\lambda & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

$P_f(\lambda) = \det\left(M - \lambda I_n\right)$.

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient le polynôme caractéristique de f :

$$P_f(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right).$$

6) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in K^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i = 0$, alors on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0.$$

Or la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre, donc :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \lambda_i = 0.$$

Ainsi $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$. Par suite, il n'existe aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n qui soit annulateur de f.

> En effet, supposons qu'il existe $Q \in K[X]$ de degré $r \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $Q(f) = 0$. Alors :
>
> $$Q = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k \quad \text{avec} \quad b_r \neq 0$$
>
> donc :
>
> $$Q(f) = 0 = \sum_{k=0}^{r} b_k f^k \qquad b_r \neq 0$$
>
> donc la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^r)$ est liée ; or elle est extraite de la famille libre $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ (extraite car $r \leqslant n-1$) : nous aboutissons à une contradiction.

On en déduit que si M_f est le polynôme minimal de f, alors $d^\circ M_f \geqslant n$.

> Ici on pourrait conclure en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton (mais c'est exclu par le texte). En effet, P_f est un polynôme annulateur de f, et c'est donc un multiple de M_f, donc :
>
> $$d^\circ M_f = d^\circ P_f = n.$$
>
> M_f est unitaire, le coefficient dominant de P_f est $(-1)^n$ donc $M_f = (-1)^n P_f$.

Donnons une preuve directe de ce résultat n'utilisant pas le théorème de Cayley-Hamilton.

On rappelle que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et que :

$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$

Sachant que les puissances d'un endomorphisme sont permutables, on en déduit :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ f^j \circ f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^j \circ f^k(x_0)$$

soit :

$$f^n\left(f^j(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\left(f^j(x_0)\right)$$

ou encore :

$$\left(f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k\right)\left(f^j(x_0)\right) = 0$$

Il en résulte que l'endomorphisme :

$$f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

est nul, puisqu'il s'annule sur tous les vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

Ainsi le polynôme :

$$X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

est un polynôme annulateur de f, c'est donc un multiple de M_f, unitaire comme M_f ; or on a vu que $d^\circ M_f \geqslant n$ donc on obtient :

$$M_f(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

On reconnaît $(-1)^n P_f(X)$ donc $M_f(X) = (-1)^n P_f(X)$.

III – Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

7) D'après la question II.6), si f est cyclique, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ tel que :

$$P_f(X) = (-1)^n \left[X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right]$$

et on a vu que $f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0$.

Ainsi $P_f(f) = 0$ lorsque f est cyclique.

8) f est un endomorphisme quelconque de E.

a) Si F est un sous-espace vectoriel de E, stable par f, $(F \neq \{0\})$, soit B_1 une base de F et B_2 une famille de vecteurs de E telle que $B = B_1 \cup B_2$ soit une base de E.

La matrice de f dans la base B est la matrice blocs :

$$\begin{pmatrix} M_{B_1}(f_F) & C_1 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

donc le polynôme caractéristique de f est :

$$P_f(\lambda) = \det\left(M_{B_1}(f_F) - \lambda I_m\right) \det\left(C_2 - \lambda I_{n-m}\right).$$

> m est la dimension de l'espace vectoriel F.

Ainsi le polynôme $\det M_{B_1}(f_{|F} - XI_m)$ divise $P_f(X)$, or $\det M_{B_1}(f_{|F} - XI_m)$ est le polynôme caractéristique de $f_{|F}$.

b) Soit $x \neq 0$ et $E(x) = \operatorname{Vect}\left(f^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Alors $E(x)$ est stable par f et, de plus, $\left(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)\right)$ est une base de $E(x)$ ($\dim E(x) = m$).

Ainsi $f_{E(x)}$ est un endomorphisme cyclique de $E(x)$ de polynôme caractéristique P_x qui divise P_f d'après a) : $P_f = QP_x$ avec $Q \in K[X]$.

Or, d'après 7), $P_x\left(f_{E(x)}\right)(x) = 0$ donc $P_x(f)(x) = 0$, puis $P_f(f)(x) = Q(f) \circ P_x(f)(x) = 0$.

Ainsi $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $P_f(f)(x) = 0$, ce qui est aussi vrai pour $x = 0$.

> Car $P_f(f) \in \mathcal{L}(E)$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $P_f(f)(x) = 0$, donc $P_f(f) = 0$; c'est le théorème de Cayley-Hamilton.

IV – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables parmi les cycliques

Montrons tout d'abord que si λ est valeur propre de f, endomorphisme cyclique, alors $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est une droite vectorielle.

- Soit λ une valeur propre de f et $E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda\,\text{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à λ.

D'après II.5), la matrice de $f - \lambda\,\text{Id}_E$ dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est $M - \lambda I_n$.

λ étant valeur propre de f, $\dim \text{Ker}\,(f - \lambda\,\text{Id}_E) \geqslant 1$ et, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $(f - \lambda\,\text{Id}_E)$ de E, $\text{rg}\,(f - \lambda\,\text{Id}_E) \leqslant n - 1$.

Or $\text{rg}\,(f - \lambda\,\text{Id}_E) = \text{rg}\,(M - \lambda I_n)$, et les $(n-1)$ premières colonnes de $M - \lambda I_n$ sont :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 1 & -\lambda & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & -\lambda \\ & & & \ddots \\ 0 & \ldots\ \ldots\ \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elles forment une famille libre, donc $\text{rg}\,(M - \lambda I_n) = n - 1$ et $\dim \text{Ker}\,(f - \lambda\,\text{Id}_E) = 1$.

- Si f est diagonalisable, alors $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}\, f} \dim E_\lambda$.

Or, d'après le paragraphe précédent, $\dim E_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, donc :

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}\, f} 1$$

ce qui donne $\text{Card}\,\text{Sp}\, f = n$ et f a donc n valeurs propres deux à deux distinctes.

Réciproquement, si f a n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Ainsi, f étant un endomorphisme cyclique, f est diagonalisable si et seulement si f a n valeurs propres distinctes.

V – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les diagonalisables

9) f étant diagonalisable, le polynôme minimal de f, M_f, est scindé et à racines simples ; de plus, les racines de M_f sont les valeurs propres de f.

> C'est du cours. Si besoin est, il peut être à nouveau utile de le travailler...

Donc $M_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k X^k$ en décomposant M_f dans la base canonique.

> Le degré de M_f est p.

Et M_f donne une combinaison linéaire nulle non triviale de $\text{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^p$.

> En effet, $M_f(f) = 0$ s'écrit $f^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k f^k = 0$.

Ainsi la famille $(\text{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^p)$ est une famille liée de $\mathscr{L}(E)$.

10) $p = n$ et f est diagonalisable, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E formé de vecteurs propres de f.

Soit $x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j$, alors : $\forall f \in \mathbb{N}$, $f^k(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k x_j$; et soit Δ le déterminant dans la base $B = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ de la famille $(f^k(x_0))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$:

$$\Delta = \mathrm{Det}_B\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnaît le déterminant de Vandermonde des n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts donc $\Delta \neq 0$ et, par suite, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc $E = E(x_0)$ et f est cylique.

11) D'après la question IV, si f est cyclique et diagonalisable, alors f a n valeurs propres distinctes c'est-à-dire $p = n$.

D'après la question V.10), si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est cyclique.

En conclusion, f étant diagonalisable, f est cyclique si et seulement si $p = n$.

> On a obtenu de façon plus précise : soit f diagonalisable, alors f est cyclique si et seulement si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

VI – Étude du commutant de f lorsque f est cyclique

$E(x_0) = E$.

12) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, u et v commutant avec f.

Bien sûr, si $u = v$, alors $u(x_0) = v(x_0)$.

La réciproque est plus intéressante. En effet, supposons que $u(x_0) = v(x_0)$ et travaillons dans la base de E :

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)).$$

Comparons $u(f^k(x_0))$ et $v(f^k(x_0))$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Pour cela, on montre par récurrence que si u et f commutent, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u et f^k commutent.

> Ce résultat est immédiat. En effet, par récurrence, si u et f^k commutent, montrons que u et f^{k+1} commutent.
>
> $u \circ f^{k+1} = (u \circ f^k) \circ f = (f^k \circ u) \circ f$ d'après l'hypothèse de récurrence, puis :
>
> $$(f^k \circ u) \circ f = f^k \circ (u \circ f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u \text{ et } f \text{ commutent}}}{=} f^k \circ (f \circ u) = (f^k \circ f) \circ u = f^{k+1} \circ u$$
>
> Ainsi $u \circ f^{k+1} = f^{k+1} \circ u$. La propriété est héréditaire. Or, par hypothèse, f et u commutent donc, d'après le principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f^k et u commutent.

De même, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f^k et v commutent car f et v commutent, donc :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u(f^k(x_0)) = f^k(u(x_0)) = f^k(v(x_0)) = v(f^k(x_0)).$$

Ainsi les endomorphismes u et v coïncident sur la base $B = (f^k(x_0))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ de E, donc sont égaux.

> On peut rappeler ici qu'une application linéaire est entièrement déterminer par une base de E et son image.

On vient ainsi de montrer que si $E(x_0) = E$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ commutent avec f, alors $u = v$ si et seulement si $u(x_0) = v(x_0)$.

13) Soit $\psi \ : \ C(f) \to E, g \mapsto g(x_0)$.

ψ est une application linéaire du K-espace vectoriel $C(f)$ dans le K-espace vectoriel E, alors ψ est injective d'après VI.12).

ψ est surjective, en effet, soit $y \in E$ et la base $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E, alors :

$$\exists!(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^n \ / \ y = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0).$$

Considérons $g = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$, alors $g \in C(f)$ et $g(x_0) = y$; ainsi $\psi(g) = y$, donc tout $y \in E$ admet un antécédent, c'est-à-dire que ψ est surjective.

> On peut vérifier auparavant que $C(f)$ est un K-espace vectoriel : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Donc ψ est un isomorphisme d'espace vectoriel, et E étant de dimension finie, $C(f)$ l'est également et on a :

$$\dim C(f) = \dim E = n.$$

Or, d'après II.5), $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre, de plus :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^k \in C(f).$$

Donc, comme Card $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1}) = n = \dim C(f)$, c'est une base de $C(f)$.

VII – Caractérisation des endomorphismes cycliques parmi les nilpotents

14) $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

- Il existe $x_0 \in E \setminus \mathrm{Ker}\, u^{p-1}$ donc $u^p(x_0) = 0$ et $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

Soit la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$.

Supposons qu'elle est liée, il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E.$$

Soit $\mathcal{N} = \{k \in [\![0, p-1]\!] \ / \ \lambda_k \neq 0\}$; $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (d'après les hypothèses faites sur $(\lambda_k)_{k \in [\![0, p-1]\!]}$) donc admet un plus petit élément ; soit q ce plus petit élément, on a alors :

$$\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E$$

donc :

$$u^{p-1-q}\left(\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = 0$$

Or $u^{p-1-q}\left(\sum_{k=q}^{k=p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = \lambda_q u^{p-1}(x_0)$, donc :

$$\lambda_q u^{p-1}(x_0) = 0$$

et avec $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, il vient $\lambda_q = 0$, ce qui est en contradiction avec la définition de q.

Ainsi la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille libre de E ; or $\dim E = n$ donc $p \leqslant n$.

- Lorsque $p = n$, alors $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\
 & \ddots & & & & & \vdots \\
1 & & 0 & & & & \vdots \\
 & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
0 & & 1 & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & 1 & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & & 1
\end{pmatrix}$$

15) Si $p = n$, en choisissant x_0 comme dans la question VII.14), on a :

$\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E et alors u est cyclique.

Si u est cyclique, il existe, par définition des endomorphismes cycliques, x_0 élément de E tel que $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E, donc une famille libre de E, donc :

$$u^{n-1}(x_0) \neq 0$$

ce qui entraine que, p étant l'indice de nilpotence de u, $p \geqslant n$, or, d'après VII.14), $p \leqslant n$ donc $p = n$.

On vient de montrer que, u étant un endomorphisme nilpotent de E, d'indice p, u est cyclique si et seulement si $p = n$.

VIII – Caractérisation d'un endomorphisme cyclique par son polynôme minimal

16) u étant nilpotent d'indice p, on a $u^p = 0$ donc $\left(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E\right)^p = 0$. Ainsi le polynôme $(X - \lambda)^p$ est un polynôme annulateur de f, donc un multiple du polynôme minimal de f ; or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k < p$, le polynôme $(X - \lambda)^k$ n'est pas un polynôme annulateur de f.

> Sinon on aurait $\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^k = 0$ avec $k < p$, donc $u^k = 0$ avec $k < p$, ce qui est contraire à la définition de p.

Ainsi le polynôme minimal de f est le polynôme :

$$M_f = (X - \lambda)^p.$$

17) On note f_{F_k} l'endomorphisme de F_k induit par f.

Soit M_f le polynôme minimal de f, alors M_f est un polynôme annulateur de f_{F_k} pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, ainsi M_f est un multiple de M_k, polynôme minimal de f_{F_k} pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, donc M_f est un multiple du PPCM des $\left(M_k\right)_{k \in [\![1, p]\!]}$.

Réciproquement, le PPCM de $M_1, \ldots, M_p$ annule chaque f_{F_k} donc, d'après le théorème de recollement, E étant somme directe des F_k, annule f. Ainsi le PPCM de $M_1, M_2, \ldots, M_p$ est un multiple de M_f.

De plus ces deux polynômes sont unitaires, donc il sont égaux et $M_f = \text{PPCM}\,(M_k)_{k\in [\![1,p]\!]}$.

> Il s'agit du théorème suivant.
> Lorsque $E = \oplus E_i$, alors pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F, il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i avec ici :
> $$u_i = \left(\text{PPCM de } M_1, \ldots, M_p\right)\left(f_{F_i}\right)(= 0).$$

18) $M_f(X) = (-1)^n P_f(X)$.

Soit $M_k = \left(X - \lambda_k\right)^{r_k}$ et $F_k = \text{Ker}\left(f - \lambda_k \,\text{Id}_E\right)^{r_k}$.

Les polynômes $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_p$ sont premiers entre eux deux à deux car :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \left(i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j\right)$$

donc, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont en somme directe et on a :

$$\text{Ker}\left(\prod_{k=1}^{p} M_k\right)(f) = \bigoplus_{k=1}^{p} \text{Ker}\, M_k(f)$$

c'est-à-dire :

$$\text{Ker}\, P_f(f) = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k.$$

Or $P_f(f) = 0$ donc $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} F_k$.

Quel que soit k, $\left(f - \lambda_k \,\text{Id}_E\right)^{r_k}$ permute avec f, donc F_k est stable par f et, en posant $u_k = f_{F_k} - \lambda_k \,\text{Id}_{F_k}$, on a $u_k^{r_k} = 0$ et u_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice r_k (car sinon M_f ne serait pas minimal).

Posons $\dim F_k = n_k$ donc, d'après le VII.14), $r_k \leqslant n_k$. Or :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$$

donc :

$$\dim E = n = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \sum_{k=1}^{p} n_k \geqslant \sum_{k=1}^{p} r_k = d^\circ M_f = n$$

donc $n_k = r_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

D'après la question VII.14), il existe $x_k \in F_k$ tel que :

$$B_k = \left(u_k^{n_k-1}(x_0), u_k^{n_k-2}(x_0), \ldots, u_k(x_k), x_k\right)$$

est une base de F_k et alors la matrice de f_{F_k} dans cette base est A_k.

$B = \bigcup\limits_{k=1}^{p} B_k$ est une base de E et la matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & A_2 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & A_k & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & & & A_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

19) Soit la matrice M du II.5), alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ & \ddots & & \vdots & \\ 1 & & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit β une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M_\beta(f) = M$, alors d'une part :

$$\begin{aligned} P_f(X) &= (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right) \\ &= (-1)^n \prod_{k=1}^{p} \left(X - \lambda_k\right)^{r_k} \end{aligned}$$

D'autre part, la base β est de la forme $\beta = \left(x_0, f\left(x_0\right), \dots, f^{n-1}\left(x_0\right)\right)$, donc f est cyclique ; par suite, d'après I.6), $M_f = (-1)^n P_f$ avec P_f scindé, donc f vérifie les hypothèses de la question VIII. 18) ; ainsi, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est A : A et M sont donc semblables.

On vient de montrer que si un endomorphisme scindé est tel que $M_f(X) = (-1)^n P_f(X)$, alors il est cyclique ; et réciproquement, d'après I.6), si f est cyclique alors $M_f(X) = (-1)^n P_f(X)$.

En conclusion, un endomorphisme scindé f, de polynômes minimal M_f et caractéristique P_f est cyclique si et seulement si $M_f = (-1)^n P_f$.

IX – Forme de Frobénius d'une matrice, forme de Jordan d'une matrice nilpotente

20) $T_x = \left\{P \in K\left[X\right] \;/\; P(f)(x) = 0_E\right\}$ est un idéal de $K\left[X\right]$ contenant M_f donc est engendré par un polynôme unitaire M_x, et M_x divise M_f.

> Démonstration classique : il suffit de retourner à la définition d'un idéal de $K\left[X\right]$, anneau principal. Dans la suite M_x sera appelé polynôme minimal de x.

21) Soit M_f le polynôme minimal de f et sa décomposition en produit de polynômes irréductibles :

$$M_f = \prod_{i=1}^{k} Q_i^{\alpha_i}$$

où $Q_i \in K\left[X\right]$ est irréductible et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$; de plus les polynômes Q_i, $i \in [\![1, k]\!]$, sont deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} M_f(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(f).$$

Comme M_f est minimal :

$$\operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i - 1}(f) \neq \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(f) \quad \text{pour tout } i \in [\![1, k]\!].$$

Soit, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(f) \setminus \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i - 1}(f)$ et $y = \sum_{i=1}^{k} x_i$ alors :

$$P(f)(y) = \sum_{i=1}^{k} P(f)\left(x_i\right) \quad \text{pour tout } P \in K\left[X\right]$$

et $P(f)(x_i)$ est un élément de $\operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

$P(f)(y)$ est nul si et seulement si $P(f)(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ car les $\operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(f)$ sont en somme directe.

Les conditions $Q_i^{\alpha_i}(f)(x_i) = 0$ et $Q_i^{\alpha_i - 1}(f)(x_i)$, avec Q_i irréductible, montrent que le polynôme minimal de x_i est $M_{x_i} = Q_i^{\alpha_i}$.

On a donc $P(f)(x_i) = 0$ si et seulement si P est multiple de $Q_i^{\alpha_i}$. Et, puisque les Q_i sont deux à deux premiers entre eux, la condition $\forall i \in [\![1, k]\!], P(f)(x_i) = 0$ est équivalente à P est multiple de M_f. Il en résulte $M_y = M_f$.

22) On montre la proposition par récurrence sur la dimension de E. Elle est vraie pour $n = 1$. On la suppose maintenant vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et soit $y \in E$ tel que $M_y = M_f$.

Posons $x_0 = y$, si $E(x_0) = E$, c'est terminé.

Sinon, soit F un supplémentaire de $E(x_0)$ et p le projecteur sur F parallèlement à $E(x_0)$.

Soit $g = p \circ f_{|F}$ alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et $\dim F < n$.

Il existe, d'après l'hypothèse de récurrence, $y_1, y_2, \dots, y_p$ vecteurs de F tels que :

$$F = \bigoplus_{q=1}^{p} F(y_q) \quad \text{et} \quad N_{y_{i+1}} \text{ divise } N_{y_i}$$

où N_{y_i} est le polynôme minimal de y_i (relativement à g) c'est-à-dire le générateur unitaire de :

$$\{P \in K[X] \ / \ P(g)(y_i) = 0\}.$$

Cherchons à présent $x_i \in E$ tel que :

$$x_i - y_i \in E(x_0) \text{ et } N_{y_i}(f)(x_i) = 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, p]\!].$$

Par définition de g : $\forall y \in F, g(y) - f(y) \in E(x_0)$.

Comme $E(x_0)$ est stable par f, par récurrence on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall y \in F, g^k(y) - f^k(y) \in E(x_0),$$

par suite :

$$\forall P \in K[X], \forall y \in F, P(g)(y) - P(f)(y) \in E(x_0) \tag{$*$}$$

en particulier pour $P = M_f$:

$$\forall y \in F, \underbrace{M_f(g)(y) - M_f(f)(y)}_{= M_f(g)(y)} \in E(x_0)$$

et $\forall i \in [\![1, p]\!], M_f(g)(y_i) = p(M_f(f)(y_i)) = 0$ donc N_{y_i} divise M_f pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Ainsi pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $R_i \in K[X]$ tel que $M_f = R_i N_{y_i}$.

Appliquons $(*)$ à N_{y_i} et y_i :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], N_{y_i}(g)(y_i) - N_{y_i}(f)(y_i) \in E(x_0).$$

Or $N_{y_i}(g)(y_i) = 0$ donc :

$$N_{y_i}(f)(y_i) \in E(x_0).$$

Ainsi il existe $P_i \in K[X]$ tel que $N_{y_i}(f)(y_i) = P_i(f)(x_0)$, donc :

$$M_f(f)(y_i) = R_i(f) \circ N_{y_i}(f)(y_i)$$
$$0 = (R_i P_i)(f)(x_0)$$

on en déduit que $M_f \mid R_i P_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \ \exists\, S_i \in K[X] \ / \ R_i P_i = M_f S_i.$$

Soit $x_i = y_i - S_i(f)(x_0)$.

> 1) En reprenant les différentes relations entre les polynômes :
> $$M_f = R_i N_{y_i} \quad \text{et} \quad R_i P_i = M_f S_i,$$
> on obtient $N_{y_i} \cdot S_i \cdot R_i = M_f S_i = R_i P_i$, puis :
> $$\forall i \in [\![1, p]\!],\ N_{y_i} S_i = P_i.$$
> 2) Un des objectifs est de montrer que $N_{y_i}(f)(x_i) = 0$.

$$\begin{aligned}
N_{y_i}(f)(x_i) &= N_{y_i}(f)(y_i) - N_{y_i}(f)S_i(f)(x_0)\\
&= N_{y_i}(f)(y_i) - (N_{y_i}S_i)(f)(x_0)\\
&= N_{y_i}(f)(y_i) - P_i(f)(x_0)\\
&= P_i(f)(x_0) - P_i(f)(x_0)\\
&= 0 \quad \text{pour tout } i \in [\![1, p]\!].
\end{aligned}$$

Ainsi, par construction :

$$F(y_i) \oplus E(x_0) = E(x_i) \oplus E(x_0) \text{ pour tout } i \in [\![1, p]\!].$$

> On a obtenu par construction :
> $$M_{x_0} = M_f \text{ et } M_{x_i} = N_{y_i} \text{ pour tout } i \in [\![1, p]\!].$$

On a donc construit par récurrence :

$$x_0, x_1, \dots, x_p \text{ tel que } E = \bigoplus_{i=0}^{p} E(x_i)$$

et pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, M_{x_i+1} divise M_{x_i}.

Alors E est somme directe de sous-espaces de la forme $E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_p)$.

Dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe, la matrice de f est donc diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme obtenue à la question II.5).

Si, de plus, f est scindé, il existe une base, adaptée encore à cette décomposition, dans laquelle la matrice de f est de la forme A (voir VIII.18)).

23) Lorsque u est nilpotent, alors $u_{|E(x_i)}$ est nilpotent (ou nul) et on déduit la matrice U de u dans une base de E adaptée à la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=0}^{p} E(x_i)$$

de la question précédente.

$U = (u_{i,j})$ avec $u_{ij} = 0$ si $j \neq i+1$ et $u_{i,i+1} \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$.

X – Un exemple

$p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Supposons qu'il existe $v \neq 0$ tel que $(v, f(v))$ soit liée ; alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$, donc λ est une valeur propre de f et vérifie $\lambda^p - 1 = 0$ (car $X^p - 1$ est un polynôme annulateur de f).

Alors f admet une valeur propre réelle λ qui ne peut être que $+1$ ou -1.

Le polynôme caractéristique de f, de degré 2, est à coefficients réels et admet une racine réelle, donc est scindé et l'autre racine ne peut être que $+1$ ou -1 (selon la partié de p).

f est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

> En effet, $X^p - 1$ est un polynôme annulateur de f, scindé dans $\mathbb{C}[X]$, et à racines simples.

Si $\mathrm{Sp}(f) = \{+1\}$ alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Si $\mathrm{Sp}(f) = \{+1, -1\}$ alors f est une symétrie.

Dans tous les cas, $f^k = \mathrm{Id}_E$ où $k \in \{1, 2\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc :

$$\forall v \in E, \left(v \neq 0 \Rightarrow (v, f(v)) \text{ libre}\right).$$

Or dim $E = 2$, donc pour tout vecteur v non nul de E, $(v, f(v))$ est une base de E. On vient ainsi de montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda \notin \{-1, +1\}$.

Comme $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racine de } X^p - 1\}$, les deux valeurs propres de f sont des complexes conjugués :

$$\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{p}} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} \quad \text{où } k \in [\![1, p-1]\!] ;$$

dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ il existe une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de f est :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^k \end{pmatrix} ;$$

alors $D^p = I_2$ et $D^k \neq I_2$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$ si et seulement si k et p sont premiers entre eux.

Dans toute base $(v, f(v))$ la matrice de f est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\dfrac{2k\pi}{p} \end{pmatrix}$$

avec $k \in [\![1, p-1]\!]$ et $k \wedge p = 1$. Le nombre d'endomorphjismes f qui vérifient les conditions imposées est le nombre de choix de :

$$\cos\frac{2k\pi}{p} \quad \text{avec } k \in [\![1, p-1]\!] \text{ premier avec } p.$$

1) Le nombre d'entiers de l'intervalle $[\![1, p-1]\!]$, premiers avec p, est le nombre $\varphi(p)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ inversibles.

2) p et k sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v éléments de $\mathbb{Z}$ tels que :!

$$up + vk = 1$$

(c'est le théorème de Bézout).

Soit $k' = p - k$, alors :

$$1 = up + v(p - k') = (u + v)p - vk'$$

donc p et k' sont premiers entre eux.

Donc p et k sont premiers entre eux si et seulement si p et $p - k$ sont premiers entre eux.

Le nombres d'endomorphismes f qui vérifient les conditions imposées est donc $(1/2)\,\varphi(p)$ ($\varphi(p)$ est pair pour tout $p \geqslant 3$).

Ces résultats peuvent être précisés par une étude de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2 Commutants d'un endomorphisme Arithmétique des polynômes

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de *dimension finie* ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$ ou un sous-corps de $\mathbb{C}$). Pour chaque polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de $\mathbb{K}[X]$, on pose :

$$P(f) = a_0e + a_1f + \dots + a_nf^n = \sum_{k=0}^{n} a_kf^k \quad \text{avec } e = \mathrm{Id}_E,\ f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k,\ f^0 = e.$$

Pour chaque vecteur u de E on pose :

$$P(f)(u) = a_0u + a_1f(u) + \dots + a_nf^n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_kf^k(u)$$

On note I_u l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(f)(u) = 0$ et $\langle u \rangle$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $u, f(u), \dots, f^k(u), \dots$

On rappelle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_p[X]$ désigne le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Remarque. Dans $\mathbb{K}[X]$ la relation «P divise Q» pourra s'écrire $P \mid Q$.

Partie I

1) a) Pour P et Q polynômes de $\mathbb{K}[X]$, vérifier que $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

b) Montrer que, pour $u \in E$, I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ distinct de l'idéal nul.

c) En déduire qu'il existe un et un seul polynôme P_u, unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré égale 1) tel que $Q \in I_u$ si et seulement si P_u divise Q. (On écrira $I_u = P_u\,\mathbb{K}[X]$.)

2) a) Déterminer P_0.

b) Existe-t-il un vecteur $u \neq 0$ tel que $P_u = P_0$?

c) Caractériser par le degré de P_u les vecteurs propres u de f.

d) Que dire de f si le degré de P_u est au plus 1 pour chaque u de E ?

3) Soient v et w des vecteurs de E.

a) α) Calculer $Q(f)(v + w)$ pour Q multiple commun de P_v et P_w.

β) Quelle relation en déduit-on entre P_{v+w} et le PPCM de P_v et P_w ?

b) α) Calculer $P_w(f)(v + w)$, puis $R(f)(v)$ pour $R = P_{v+w} \cdot P_w$.

β) En déduire P_{v+w} en fonction de P_v et P_w quand P_v et P_w sont premiers entre eux.

c) α) Déterminer P_v, P_w et P_{v+w} quand $v = u_1 + u_3$, $w = u_2 - u_3$, où u_1, u_2, u_3 sont trois vecteurs propres de f associés à trois valeurs propres distinctes.

β) Que montre cet exemple ?

Partie II

1) Calculer $P_u(f)(v)$ pour $v \in \langle u \rangle$; quelle relation en déduit-on entre P_u et P_v ?

2) Que dire de $\langle u \rangle \cap \langle u' \rangle$ lorsque P_u et $P_{u'}$ sont premiers entre eux ?

3) On pose $p = \deg P_u$, montrer que, si $u \neq 0$, $\langle u \rangle = \{A(f)(u) / A \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$. En déduire que $\dim \langle u \rangle = \deg P_u$.

4) On suppose $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle = \{0\}$. Calculer P_{u+v} en fonction de P_u et P_v.

5) On suppose $P_u = QR$ avec $Q \wedge R = 1$ et on pose $v = R(f)(u)$ et $w = Q(f)(u)$. Montrer que :

$$P_v = Q,\ P_w = R \text{ et } \langle u \rangle = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle.$$

On suppose, jusqu'à la fin de la partie II, qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $E = \langle u \rangle$ et on pose :

$$P_u = X^p - \sum_{k=1}^{p} a_{p-k} X^{p-k}.$$

6) a) $\dim E = n$, montrer que $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E. Quelle est la matrice A de f dans cette base ?

b) Comparer P_u et le polynôme caractéristique de f avec la convention $\chi_f = \det(XI_n - A)$.

7) Majorer la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et donner la dimension des sous-espaces propres de f.

8) Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f : $f(V) \subset V$.

a) Montrer que les polynômes P de $K[X]$ tels que $P(f)(u) \in V$ forment un idéal.

b) En déduire qu'il existe $v \in V$ tel que $V = \langle v \rangle$.

c) Montrer que V admet un supplémentaire W stable par f si et seulement si P_v et $\dfrac{P_u}{P_v}$ sont premiers entre eux.

d) La condition du c) étant supposée réalisée, on a $V = \langle v \rangle$ et $W = \langle w \rangle$. Donner, en fonction de v et w, un vecteur x tel que $E = \langle x \rangle$.

9) On note $\mathscr{C}(f)$ le commutant de f, c'est-à-dire l'espace vectoriel des endomorphismes de E qui commutent avec f.

a) Montrer que pour tout $u' \in E$, il existe un unique $g \in \mathscr{C}(f)$ tel que $g(u) = u'$.

b) En déduire en fonction des f^k, $k \in \mathbb{N}$, une base de $\mathscr{C}(f)$.

Partie III

On suppose que E se décompose en somme directe de la forme :

$$E = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle.$$

1) Soit g un endomorphisme de E commutant avec f.

a) Quelle relation a-t-on entre P_v et $P_{g(v)}$?

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que v_1 et v_2 éléments de E soient les images respectives $h(v)$ et $h(w)$ par un endomorphisme h commutant avec f.

2) a) Soit A, B deux polynômes non nuls. Montrer qu'il existe des polynômes A_1, A_2, B_1, B_2 tels que :

$$\begin{aligned} A = A_1A_2, &\quad B = B_1B_2, \\ B_1 \mid A_1, &\quad A_2 \mid B_2, \\ A_1 \wedge A_2 = 1, &\quad B_1 \wedge B_2 = 1, \\ A_1 \wedge B_2 = 1, &\quad B_1 \wedge A_2 = 1. \end{aligned}$$

b) Montrer qu'il existe v' et w' dans E tels que $E = \langle v' \rangle \oplus \langle w' \rangle$ avec $P_{w'}$ diviseur de $P_{v'}$.

3) Donner, en fonction des degrés de $P_{v'}$ et $P_{w'}$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$ des endomorphismes qui commutent avec f.

Solution

Partie I

1) a) C'est du cours.

b) $I_u = \{P = \mathbb{K}[X] \;/\; P(f)(u) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

> Ce n'est plus du cours... mais très proche du cours : il suffit de revoir la définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, pourquoi pas, la structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

I_u est non vide car $0 \in I_u$. (i)

$(P+Q)(f)(u) = P(f)(u)+Q(f)(u)$ donc, si $(P,Q)\in I_u^2$, on a $P(f)(u) = Q(f)(u) = 0$ et $(P+Q)(f)(u) = 0$, ce qui donne $P + Q \in I_u$. (ii)

$(PQ)(f)(u) = Q(f)\left[P(f)(u)\right]$ donc, si $P \in I_u$, on a $P(f)(u) = 0$ et pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ il vient $(PQ)(f)(u) = Q(f)(0) = 0$, ce qui montre que $PQ \in I_u$. (iii)

Les propriétés (i), (ii) et (iii) prouvent que I_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Posons $n = \dim E$, la famille $\left(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^n(u)\right)$ est liée (puisqu'elle est formée de $n+1$ vecteurs). Il existe donc $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(u) = 0$$

c'est-à-dire $P(f)(u) = 0$ où on a posé :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On constate alors que $P \in I_u$ et que $P \neq 0$ (puisque $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$) donc que :

$$I_u \neq \{0\}.$$

c) $\mathbb{K}[X]$ étant principal, l'idéal I_u non nul admet un unique générateur unitaire. C'est-à-dire qu'il existe un unique polynôme P_u, unitaire, et tel que $I_u = P_u\, \mathbb{K}[X]$.

2) a) $P(f)$ étant un endomorphisme de E, on a, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(0) = 0$. Donc :

$$I_0 = \mathbb{K}[X] \text{ et } P_0 = 1.$$

b) $1 \in I_u$ et $1(f) = \mathrm{Id}_E$ donne $u = \mathrm{Id}_E(u) = 0$.

Le seul vecteur tel que $P_u = 1$ est donc le vecteur nul.

c) ▪ Supposons que u soit vecteur propre de f.

D'après le b), puisque $u \neq 0$ on a $\deg P_u \geqslant 1$. (i)

Par définition, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\left(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E\right)(u) = 0$, c'est-à-dire $P(f)(u) = 0$ avec $P = X - \lambda$ donc aussi $X - \lambda \in I_u$. Il en résulte $\deg P_u \leqslant 1$. (ii)

Avec (i) et (ii), on obtient $\deg P_u = 1$.

▪ Supposons $\deg P_u = 1$.

P_u étant unitaire, de degré 1, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = X - \lambda$ et $P(f)(u) = 0$ donne alors $f(u) = \lambda u$. (iii)

D'après le b), $P_u \neq 1$ donne $u \neq 0$. (iv)

Les propositions (iii) et (iv) montrent que u est vecteur propre de f.

En conclusion, u est vecteur propre de f si et seulement si $\deg P_u = 1$.

d) D'après le b), cette condition se lit :

$$\forall u \in E \setminus \{0\}, \deg P_u = 1,$$

donc, avec le c), elle donne aussi : tout vecteur de $E \setminus \{0\}$ est vecteur propre de f. On montre alors de façon classique que f est une homothétie.

Par exemple : soit $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ une base de E.

Chaque e_i est vecteur propre de f, donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists\, \lambda_i \in \mathbb{K}, f\left(e_i\right) = \lambda_i e_i .$$

Pour $i \neq j$, on a $e_i + e_j \neq 0$, donc $e_i + e_j$ est vecteur propre de f et il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f\left(e_i + e_j\right) = \mu\left(e_i + e_j\right),$$

ce qui donne aussi $\lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \mu e_i + \mu e_j$. La famille $\left(e_i, e_j\right)$ étant libre, ceci donne $\lambda_i = \mu$, $\lambda_j = \mu$, donc $\lambda_i = \lambda_j$.

En conclusion, tous les λ_i sont égaux et, en appelant λ leur valeur commune, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f\left(e_i\right) = \lambda e_i$$

donc f est l'homothétie $u \mapsto \lambda u$.

> Cette question a été posée de façon un peu différente dans le thème « Endomorphismes cycliques », sous la forme : « Que peut-on dire de $f \in \mathcal{L}(E)$ si $\dim \mathrm{Vect}\left(x, f(x)\right) = 1$ pour tout $x \in E$? »

3) a) α) $P_v \mid Q$ donne $Q \in I_v$ donc $Q(f)(v) = 0$ et de même $P_w \mid Q$ donne $Q(f)(w) = 0$ d'où enfin :

$$Q(f)(v + w) = Q(f)(v) + Q(f)(w) = 0.$$

β)

> On adopte ici la notation $P_v \vee P_w$ pour désigner le **PPCM** de P_v et P_w.

Posons $Q = P_v \vee P_w$, d'après le a)α) on a $Q(f)(v + w) = 0$ donc :

$$Q \in I_{v+w} \quad \text{ou encore} \quad P_{v+w} \mid P_v \vee P_w .$$

b) α) $P_w(f)(v + w) = P_w(f)(v) + P_w(f)(w) = P_w(f)(v)$ car $P_w \in I_w$.

En utilisant cette première égalité, il vient :

$$R(f)(v) = P_{v+w}(f) \circ P_w(f)(v) = P_{v+w}(f) \circ P_w(f)(v + w)$$

donc, l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ étant commutative, on obtient :

$$R(f)(v) = P_w(f) \circ P_{v+w}(f)(v + w)$$

soit enfin $R(f)(v) = P_w(f)(0) = 0$ car $P_{v+w} \in I_{v+w}$.

β)

> La notation $P_v \wedge P_w$ désigne le PGCD de P_v et P_w.

$R(f)(v) = 0$ donne $R \in I_v$ c'est-à-dire $P_v \mid P_{v+w}P_w$ et, avec $P_v \wedge P_w = 1$, le théorème de Gauss donne $P_v \mid P_{v+w}$.

Puisque v et w jouent des rôles symétriques, on a aussi $P_w \mid P_{v+w}$.

Enfin, avec $P_v \wedge P_w = 1$, les deux conditions $P_v \mid P_{v+w}$ et $P_w \mid P_{v+w}$ donnent $P_vP_w \mid P_{v+w}$. De plus, on a alors $P_v \vee P_w = P_vP_w$ donc, compte tenu du a)β) on obtient $P_{v+w} = P_vP_w$.

c) D'après le 2) on a $P_{u_i} = X - \lambda_i$.

Les trois polynômes P_{u_i}, $i = 1, 2, 3$ sont premiers entre eux deux à deux, donc d'après le 3)b) on obtient :

$$P_{u_1+u_3} = \left(X - \lambda_1\right)\left(X - \lambda_3\right)$$
$$P_{u_2+u_3} = \left(X - \lambda_2\right)\left(X - \lambda_3\right)$$
$$P_{u_1+u_2} = \left(X - \lambda_1\right)\left(X - \lambda_2\right)$$

Donc si P_v et P_w ne sont pas premiers entre eux, la relation $P_{v+w} \mid P_v \vee P_w$ peut être stricte.

> On peut rappeler ici, qu'étant donné λ et μ deux scalaires, les deux polynômes $X - \lambda$ et $X - \mu$ sont premiers entre eux si et seulement si λ et μ sont distincts.

Partie II

1) Il est clair que $\langle u \rangle = \text{Vect}\left(f^k(u), k \in \mathbb{N}\right) = \left\{Q(f)(u) \,/\, Q \in \mathbb{K}\left[X\right]\right\}$.

Donc, pour tout $v \in \langle u \rangle$, il existe $Q \in \mathbb{K}\left[X\right]$ tel que $v = Q(f)(u)$ et il vient :

$$\begin{aligned} P_u(f)(v) &= P_u(f) \circ Q(f)(u) & \\ &= Q(f) \circ P_u(f)(u) & \text{(commutativité de } \mathbb{K}[f]) \\ &= Q(f)(0) & (\text{car } P_u \in I_u) \\ &= 0 & \end{aligned}$$

On en déduit que $P_u \in I_v$ c'est-à-dire que $P_v \mid P_u$.

2) Soit $v \in \langle u \rangle \cap \langle u' \rangle$. D'après le II.1), $P_v \mid P_u$ et $P_v \mid P_{u'}$ donc, puisque $P_u \wedge P_{u'} = 1$, il vient $P_v = 1$ ce qui donne $u = 0$ (car $1(f)(u) = \text{Id}_E(u) = 0$, cf. I.2). En conclusion, on a :

$$\langle u \rangle \cap \langle u' \rangle = \{0\}.$$

3) On a déjà vu que $\langle u \rangle = \left\{A(f)(u) \,/\, A \in \mathbb{K}\left[X\right]\right\}$ et que pour $u \neq 0$, on a $p \geqslant 1$. Il en résulte donc :

$$\left\{A(f)(u) \,/\, A \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\right\} \subset \langle u \rangle \qquad \text{(i)}$$

Pour tout $A \in \mathbb{K}\left[X\right]$, la division euclidienne de A par P_u s'écrit :

$$A = QP_u + R \quad \text{avec} \quad \deg R \leqslant p - 1.$$

Avec $P_u(f)(u) = 0$, on en déduit $A(f)(u) = Q(f) \circ P_u(f)(u) + R(f)(u) = R(f)(u)$ donc :

$$\langle u \rangle \subset \left\{R(f)(u) \,/\, R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\right\} \qquad \text{(ii)}$$

Les inclusions (i) et (ii) donnent $\langle u \rangle = \left\{A(f)(u) \,/\, A \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\right\}$.

On déduit de cette égalité que la famille $\left(f^k(u)\right)_{0\leq k\leq p-1}$ est génératrice de $\langle u\rangle$. Montrons maintenant qu'elle est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u) = 0.$$

En prenant :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k,$$

cette égalité se lit $Q(f)(u) = 0$, soit aussi $Q \in I_u = P_u\,\mathbb{K}[X]$ donc, puisque $\deg Q < \deg P_u$, la seule possibilité est $Q = 0$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$. En conclusion, $\left(f^k(u)\right)_{0\leq k\leq p-1}$ est une base de $\langle u\rangle$, et donc $\dim\langle u\rangle = \deg P_u$. On remarque que cette égalité reste vraie lorsque $u = 0$.

4) Pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ on a $Q(f)(u) \in \langle u\rangle$ et $Q(f)(v) \in \langle v\rangle$, on obtient donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
Q \in I_{u+v} &\iff Q(f)(u+v) = 0 && \text{(définition de } I_{u+v})\\
&\iff Q(f)(u) + Q(f)(v) = 0 && \text{(linéarité de } Q(f))\\
&\iff Q(f)(u) = Q(f)(v) = 0 && (\text{car } \langle u\rangle \cap \langle v\rangle = \{0\})\\
&\iff Q \in I_u \cap I_v && \text{(définition de } I_u \text{ et } I_v)
\end{aligned}$$

Cela montre que $I_{u+v} = I_u \cap I_v$ c'est-à-dire que I_{u+v} est l'ensemble des multiples communs à P_u et P_v. Le générateur P_{u+v} de I_{u+v} est donc le plus petit commun multiple de P_u et P_v :

$$P_{u+v} = P_u \vee P_v$$

5) ▪ Calcul de P_v et P_w

Avec $v = R(f)(u)$, il vient $Q(f)(v) = (QR)(f)(u) = P_u(f)(u) = 0$ donc $Q \in I_v$ soit aussi :

$$P_v \mid Q. \tag{i}$$

Par ailleurs $P_v(f)(v) = 0$ donne $\left(P_vR\right)(f)(u) = 0$ donc $P_u \mid P_vR$ et puisque $P_u = QR$, cela donne :

$$Q \mid P_v \tag{ii}$$

(car $P_vR = QRT$ avec $R \neq 0$ donne $P_v = QT$ dans l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$).

Puisqu'il s'agit de polynômes unitaires, (i) et (ii) donnent $P_v = Q$.

En échangeant les rôles de Q et R, on obtient $P_w = R$.

▪ Montrons que $\langle u\rangle = \langle v\rangle \oplus \langle w\rangle$.

Par définition, on a $v \in \langle u\rangle$ et $w \in \langle u\rangle$ donc $\langle v\rangle \subset \langle u\rangle$ et $\langle w\rangle \subset \langle u\rangle$ (car $\langle u\rangle$ est évidemment stable par f).

D'après le II.2), $P_v \wedge P_w = Q \wedge R = 1$ donne $\langle v\rangle \cap \langle w\rangle = \{0\}$: ces deux sous-espaces sont en somme directe et on a :

$$\langle v\rangle \oplus \langle w\rangle \subset \langle u\rangle. \tag{i}$$

En utilisant le II.3) on obtient :

$$\dim\left(\langle v\rangle \oplus \langle w\rangle\right) = \dim\langle v\rangle + \dim\langle w\rangle = \deg Q + \deg R = \deg P_u$$

$$\dim\langle u\rangle = \deg P_u$$

donc $\dim\left(\langle v\rangle \oplus \langle w\rangle\right) = \dim\langle u\rangle$ et avec l'inclusion (i), il vient :

$$\langle u\rangle = \langle v\rangle \oplus \langle w\rangle.$$

6) Les résultats des questions 6)a), 6)b) et 7) sont classiques et ont déjà été obtenus dans le thème «Endomorphismes cycliques». On les montre à nouveau ici.

a) D'après le II.3) on a $n = \dim\langle u\rangle = \deg P_u = p$ et $B_u = \left(f^k(u)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une base de $\langle u\rangle$ donc de E.

Avec $P_u = X^n - \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}X^{n-k}$, la condition $P_u(f)(u) = 0$ donne :

$$f^n(u) = a_0 u + a_1 f(u) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(u)$$

et on en déduit :

$$A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_u} f = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

b) Le calcul donne :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0 = P_u\,.$$

7) La famille libre $\left(f^k(u)\right)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ et dans $\operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{rg} f \geqslant n-1$ et, avec le théorème du rang, il vient $\dim\operatorname{Ker} f \leqslant 1$.

Remarque. On peut aussi justifier que $\operatorname{rg} f \geqslant n-1$ en observant que I_{n-1} est extraite de A.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut extraire de $A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix}$ la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$$

donc $\operatorname{rg}\left(A - \lambda I_n\right) \geqslant n-1$ ce qui donne $\dim\operatorname{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) \leqslant 1$.

Par ailleurs, si λ est valeur propre de f on a $\dim\operatorname{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) \geqslant 1$, d'où finalement :

$$\forall\,\lambda \in \operatorname{Sp}(f),\ \dim\operatorname{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E\right) = 1.$$

8) a) (i) $J_u(V)$ est non vide car il contient le polynôme nul.

(ii) $J_u(V)$ est stable par la loi $+$. En effet, si $P(f)(u) \in V$ et $Q(f)(u) \in V$, on a :

$$(P+Q)(f)(u) = P(f)(u) + Q(f)(u) \in V.$$

(iii) Pour tout $P \in J_u(V)$ et tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $PQ \in J_u(V)$. En effet, le sous-espace V étant stable par f, il est également stable par tout polynôme en f donc $P(f)(u) \in V$ donne :

$$(PQ)(f)(u) = Q(f)\left[P(f)(u)\right] \in V.$$

Les propositions (i), (ii) et (iii) montrent que $J_u(V)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

> Donc un idéal principal.

b) Puisque $E = \langle u \rangle = \left\{P(f)(u) \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\right\}$, on obtient :

$$V = \left\{P(f)(u) \,/\, P \in J_u(V)\right\}$$

Or $\mathbb{K}[X]$ étant principal, il existe $M_V \in \mathbb{K}[X]$ tel que l'idéal $J_u(V)$ s'écrive :

$$J_u(V) = M_V\, \mathbb{K}[X] = \left\{M_V P \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\right\}.$$

On en déduit :

$$V = \left\{P(f) \circ M_V(f)(u) \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

c'est-à-dire $V = \left\{P(f)(v) \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\right\} = \langle v \rangle$ où on a posé $v = M_V(f)(u)$.

c) α) Supposons qu'il existe W stable par f tel que $E = V \oplus W$.

D'après le b), il existe des vecteurs v et w tels que $V = \langle v \rangle$ et $W = \langle w \rangle$ donc $E = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$, et d'après II.3), $\deg P_v + \deg P_w = n$.

Posons $M = P_v \vee P_w$: on a $M(f)(v) = M(f)(w) = 0$ car $M \in I_v \cap I_w$. Or $u \in \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$ donne l'existence de deux polynômes A et B tels que :

$$u = A(f)(v) + B(f)(w)$$

et on obtient :

$$M(f)(u) = A(f) \circ M(f)(v) + B(f) \circ M(f)(w) = 0.$$

Ce qui montre que $P_u \mid M$ donc aussi que $\deg\left(P_v \vee P_w\right) \geqslant n$. Sachant que $P_v \vee P_w = \dfrac{P_v P_w}{P_v \wedge P_w}$, l'inégalité précédente donne $\deg P_v + \deg P_w - \deg\left(P_v \wedge P_w\right) \geqslant n$ donc :

$$\deg\left(P_v \wedge P_w\right) \leqslant 0$$

c'est-à-dire $P_v \wedge P_w = 1$ (1 est l'unique polynôme unitaire de degré $\leqslant 0$).

Avec $P_v \wedge P_w = 1$ on a maintenant $M = P_v P_w$ donc $\deg M = n = \deg P_u$ et, compte tenu qu'il s'agit de polynômes unitaires, la relation $P_u \mid M$ donne $M = P_u$ soit aussi $P_w = \dfrac{P_u}{P_v}$.

La relation $P_v \wedge P_w = 1$ s'écrit donc $P_v \wedge \dfrac{P_u}{P_v} = 1$.

β) Supposons $P_v \wedge Q = 1$ où on a posé $Q = \dfrac{P_u}{P_v}$.

Remarque. On sait d'après le II.1) que, puisque $v \in \langle u \rangle = E$, P_v divise P_u et donc $\dfrac{P_u}{P_v}$ appartient à $\mathbb{K}[X]$.

Comme en II.5) en posant $w = P_v(f)(u)$, on obtient $P_w = Q$ (en effet, de $P_w(f)(w) = 0$, on déduit $P_u \mid P_v P_w$ soit $Q \mid P_w$ et de $0 = P_u(f)(u) = Q(f)(w)$ on déduit $P_w \mid Q$).

L'hypothèse $P_v \wedge Q = 1$ se lit alors $P_v \wedge P_w = 1$ et d'après II.4) on a $\langle v \rangle \cap \langle w \rangle = \{0\}$.

Avec $\dim \langle v \rangle = \deg P_v$ et $\dim \langle w \rangle = \deg P_w$, on obtient enfin :

$$\dim\left(\langle v \rangle \oplus \langle w \rangle\right) = \deg P_v + \deg P_w = \deg P_u = n$$

ce qui donne $E = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$. Ainsi il existe $W = \langle w \rangle$ sous-espace stable par f tel que $E = V \oplus W$.

d) D'après I.3) et II.3) on a $P_{v+w} = P_v P_w$ et $\dim \langle v+w \rangle = \deg P_{v+w} = \deg P_v + \deg P_w = n$ donc $E = \langle v+w \rangle$.

9) a) ▪ La question posée revient à prouver que Φ est bijective, c'est-à-dire que tout $u' \in E$ a un antécédent et un seul par Φ.

> Plus précisément encore que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

▪ Soit $u' \in E$ tel que $u' = \Phi(g)$ c'est-à-dire $u' = g(u)$.

g et f étant permutables, g est permutable avec tout polynôme en f et on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g\left(f^k(u)\right) = f^k\left(g(u)\right) = f^k\left(u'\right).$$

Ainsi il existe au plus un élément g de $\mathscr{C}(f)$ tel que $g(u) = u'$, il s'agit de l'unique application linéaire telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ g\left(f^k(u)\right) = f^k\left(u'\right).$$

En décomposant tout x de E sur la base $\mathscr{B}_u$ sous la forme :

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(u) = A(f)(u)$$

où A est le polynôme défini par $A = \sum_{k=0}^{n-1} x_k X^k$, on obtient :

$$g(x) = A(f) \circ g(u) = A(f)\left(u'\right)$$

En décomposant de même le vecteur u' sur la base $\mathscr{B}_u$, on a :

$$u' = Q(f)(u) \quad \text{avec } Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X],$$

donc $\forall x \in E$, $g(x) = A(f) \circ Q(f)(u) = Q(f) \circ A(f)(u)$, soit aussi $g(x) = Q(f)(x)$ et donc $g = Q(f)$.

Par ailleurs, tout polynôme en f est permutable avec f, donc $Q(f) \in \mathscr{C}(f)$, et par définition de Q, on a $Q(f)(u) = u'$ c'est-à-dire $\Phi\left(Q(f)\right) = u'$.

On a ainsi prouvé que u' a un antécédent et un seul par Φ, il s'agit de $Q(f)$.

b) Il est clair que Φ est linéaire, c'est donc un isomorphisme de $\mathscr{C}(f)$ sur E et une base de $\mathscr{C}(f)$ est $\Phi^{-1}\left(\mathscr{B}_u\right)$.

Pour tout vecteur $f^k(u)$ de la base $\mathscr{B}_u$, on a $\Phi^{-1}\left(f^k(u)\right) = f^k$, une base de $\mathscr{C}(f)$ est donc $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

Remarquons enfin que l'on a dans ce cas : $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Partie III

1) a) Si g permute avec f alors il permute avec tout polynôme en f, donc $P_v(f)(v) = 0$ donne $P_v(f)\left[g(v)\right] = g \circ P_v(f)(v) = 0$. On en déduit que $P_v \in I_{g(v)}$ donc que $P_{g(v)} \mid P_v$.

b) D'après le a), une condition nécessaire est $P_{v_1} \mid P_v$, $P_{w_1} \mid P_w$.

Remarquons qu'en posant $p = \deg P_v$, $q = \deg P_w$ (donc $p + q = n$), une base de E adaptée à la somme directe $E = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$ est :

$$\left(v, f(v), \ldots, f^{p-1}(v), w, f(w), \ldots, f^{q-1}(w)\right)$$

donc pour tout $x \in E$, il existe un couple unique $(A, B) \in \mathbb{K}_{p-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$ tel que :

$$x = A(f)(v) + B(f)(w).$$

Comme en II., si $h \in \mathscr{C}(f)$ vérifie $h(v) = v_1$ et $h(w) = w_1$, on obtient :

$$h\left[A(f)(v)\right] = A(f)\left[h(v)\right] = A(f)\left(v_1\right)$$

$$\text{et} \qquad h\left[B(f)(w)\right] = B(f)\left[h(w)\right] = B(f)\left(w_1\right)$$

$$\text{donc} \qquad h(x) = A(f)\left(v_1\right) + B(f)\left(w_1\right)$$

Soit $g \in \mathscr{C}(f)$ et $v = g(u)$. Il existe un unique polynôme :

$$V \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ C = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k \text{ tel que } v = V(f)(u).$$

Pour tout $x \in E$, avec $x = A(f)(u)$, on obtient alors :

$$g(x) = A(f) \circ V(f)(u)$$

$$\text{donc} \qquad g(x) = V(f) \circ A(f)(u) = V(f)(u)$$

Ceci prouve que, v_1 et w_1 étant donnés, il existe au plus un élément $h \in \mathscr{C}(f)$ vérifiant $h(v) = v_1$, $h(w) = w_1$: il est défini par :

$$h \ : \ x \mapsto A(f)\left(v_1\right) + B(f)\left(w_1\right)$$

Pour la réciproque attendue, il faut donc montrer que si $P_{v_1} \mid P_v$ et $P_{w_1} \mid P_w$, l'application h définie ci-dessus appartient à $\mathscr{C}(f)$ et vérifie $h(v) = v_1$, $h(w) = w_1$.

La linéarité de h est conséquence immédiate de celle de l'application :

$$\Phi \ : \ x \mapsto (A, B) \text{ de } E \text{ dans } \mathbb{K}_{p-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$$

Avec $v = 1(f)(v) + 0(f)(w)$ et $w = 0(f)(v) + 1(f)(w)$, on obtient $h(v) = v_1$ et $h(w) = w_1$. Il reste à montrer que $\forall x \in E,\ h \circ f(x) = f \circ h(x)$.

> Car $1(f) = \mathrm{Id}_E$; $0(f) = 0$.

Soit $x = A(f)(v) + B(f)(w)$ avec $\deg A \leqslant p-1$, $\deg B \leqslant q-1$, par définition de h, il vient :

$$h(x) = A(f)\left(v_1\right) + B(f)\left(w_1\right)$$

$$\text{donc} \qquad f \circ h(x) = f \circ A(f)\left(v_1\right) + f \circ B(f)\left(w_1\right)$$

$$= (XA)(f)\left(v_1\right) + (XB)(f)\left(w_1\right)$$

De même on a $f(x) = (XA)(f)(v) + (XB)(f)(w)$, et pour appliquer la définition de h, il faut alors déterminer le couple $\left(A_1, B_1\right) = \Phi\left(f(x)\right)$.

> Avec, par définition de Φ, $d^\circ A_1 \leqslant p-1$; $d^\circ B_1 \leqslant q-1$.

On effectue les divisions euclidiennes :

$$XA = Q_1 P_v + A_1 \qquad \deg A_1 \leqslant p-1$$

$$XB = Q_2 P_w + B_1 \qquad \deg B_1 \leqslant q-1$$

et il vient $f(x) = A_1(f)(v) + B_1(f)(w)$ donc :

$$h \circ f(x) = A_1(f)\left(v_1\right) + B_1(f)\left(w_1\right).$$

En remarquant que $P_v(f)\left(v_1\right) = 0$ et $P_w(f)\left(w_1\right) = 0$, on obtient :

> En effet, par exemple, $P_v(f)\left(v_1\right) = P_v(f)\left(h(v)\right) = h \circ P_v(f)(v) = 0$ car $P_v(f)$ et h commutent.

$$(XA)(f)\left(v_1\right) = Q_1(f) \circ P_v(f)\left(v_1\right) + A_1(f)\left(v_1\right) = A_1(f)\left(v_1\right)$$

$$\text{et} \quad (XB)(f)\left(w_1\right) = Q_2(f) \circ P_w(f)\left(w_1\right) + B_1(f)\left(w_1\right) = B_1(f)\left(w_1\right)$$

donc $f \circ h(x) = A_1(f)\left(v_1\right) + B_1(f)\left(w_1\right) = h \circ f(x)$.

On a ainsi prouvé que $f \circ h = h \circ f$ donc que $h \in \mathscr{C}(f)$ et la condition annoncée est nécessaire et suffisante.

> C'est-à-dire : $P_{v_1} \mid P_v$ et $P_{w_1} \mid P_w$.

2) a) Utilisons les décompositions de A et B en facteurs premiers : il existe $(Q_i)_{i \in I}$ famille finie de polynômes irréductibles, $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ familles d'entiers naturels telles que :

$$A = \prod_{i \in I} Q_i^{\alpha_i} \text{ et } B = \prod_{i \in I} Q_i^{\beta_i}.$$

On obtient une partition de I en deux parties I_1 et I_2 en posant :

$$I_1 = \{ i \in I \mid \alpha_i > \beta_i \} \text{ et } I_2 = \{ i \in I \mid \alpha_i \leqslant \beta_i \}$$

(on a en effet $I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \varnothing$).

En posant $A_1 = \prod_{i \in I_1} Q_i^{\alpha_i}$, $A_2 = \prod_{i \in I_2} Q_i^{\alpha_i}$, $B_1 = \prod_{i \in I_1} Q_i^{\beta_i}$, $B_2 = \prod_{i \in I_2} Q_i^{\beta_i}$, on a évidemment :

$$A = A_1 A_2 \text{ et } B = B_1 B_2 .$$

Avec $\forall i \in I_1$, $\alpha_i > \beta_i$, on obtient $B_1 \mid A_1$; et de même $\forall i \in I_2$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$ donne $A_2 \mid B_2$.

Enfin, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ donne $A_1 \wedge A_2 = 1$, $B_1 \wedge B_2 = 1$, $A_1 \wedge B_2 = 1$, $A_2 \wedge B_1 = 1$.

b) D'après le a), il existe des polynômes A, D, B, Δ tels que :

$$P_v = AD,\ P_w = \Delta B \text{ avec } \Delta \mid A,\ D \mid B,\ A \wedge D = 1,\ \Delta \wedge B = 1,\ A \wedge B = 1,\ D \wedge \Delta = 1$$

D'après le II.5),

avec $v_1 = D(f)(v)$ et $v_2 = A(f)(v)$, on a $\langle v \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$, $P_{v_1} = A$, $P_{v_2} = D$;

avec $w_1 = \Delta(f)(w)$ et $w_2 = A(f)(w)$, on a $\langle w \rangle = \langle w_1 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle$, $P_{w_1} = B$, $P_{w_2} = \Delta$

d'où, en particulier, $E = \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle$.

Alors d'après le II.8),

$P_{v_2} \wedge P_{w_2} = 1$ donne $\langle v_2 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle = \langle v_2 + w_2 \rangle$ et $P_{v_2 + w_2} = D\Delta$

$P_{v_1} \wedge P_{w_1} = 1$ donne $\langle v_1 \rangle \oplus \langle w_1 \rangle = \langle v_1 + w_1 \rangle$ et $P_{v_1 + w_1} = AB$.

Ainsi en posant $v' = v_1 + w_1$ et $w' = v_2 + w_2$, on obtient

$$E = \langle v' \rangle \oplus \langle w' \rangle \text{ avec } P_{w'} = D\Delta \text{ diviseur de } P_{v'} = AB$$

3) D'après III.1), l'application $\Phi : h \mapsto (h(v'), h(w'))$ est une bijection de $\mathscr{C}(f)$ sur :

$$C = \{(x, y) \in E^2 \,/\, P_x \mid P_{v'}\ .\ P_y \mid P_{w'}\} = \{x \in E \,/\, P_x \mid P_{v'}\} \times \{y \in E \,/\, P_y \mid P_{w'}\}.$$

Comme Φ est visiblement linéaire, C est un sous-espace vectoriel de E^2 et on a :

$$\dim \mathscr{C}(f) = \dim C$$

Posons $p = \dim \langle v' \rangle = \deg P_{v'}$, $q = \dim \langle w' \rangle = \deg P_{w'}$ donc $p + q = n = \dim E$.

Puisque $E = \langle v' \rangle \oplus \langle w' \rangle$, E admet pour base

$$\mathscr{B} = \left(v', f(v'), \ldots, f^{p-1}(v'), w', f(w'), \ldots, f^{q-1}(w')\right)$$

et tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = A(f)(v') + B(f)(w')$ avec $\deg A \leqslant p-1$ et $\deg B \leqslant q-1$.

- Notons d'abord que $\forall x \in E$, $P_x \mid P_{v'}$. En effet, on a :

$$P_{v'}(f)(x) = A(f) \circ P_{v'}(f)(v') + B(f) \circ P_{v'}(f)(w') = 0$$

car $P_{v'}(f)(v') = 0$ et $P_{v'}(f)(w') = 0$ puisque $P_{v'}$ est multiple de $P_{w'}$.

On a donc $\{x \in E \,/\, P_x \mid P_{v'}\} = E$ et $\dim \{x \in E \,/\, P_x \mid P_{v'}\} = \dim E = p + q$ (i)

- Il reste à caractériser les $x \in E$ tels que $P_x \mid P_{w'}$.

Toujours avec $x = A(f)(v') + B(f)(w')$, compte tenu de $P_{w'}(f)(w') = 0$, on a successivement :

$$\begin{aligned} P_x \mid P_{w'} &\iff P_{w'}(f)(x) = 0 \\ &\iff (AP_{w'})(f)(v') = 0 \\ &\iff AP_{w'} \in I_{v'} \\ &\iff \exists R \in \mathbb{K}[X], AP_{w'} = RP_{v'} \end{aligned}$$

Sachant que $P_{v'} = QP_{w'}$, on obtient :

$$P_x \mid P_{w'} \iff \exists R \in \mathbb{K}[X], A = QR$$

Compte tenu de $\deg A \leqslant p - 1$ et $\deg Q = p - q$, on obtient $\deg R \leqslant q - 1$ et :

$$\{x \in E \;/\; P_x \mid P_{w'}\} = \{R(f) \circ Q(f)(v') + B(f)(w') \;/\; R \in \mathbb{K}_{q-1}[X], B \in \mathbb{K}_{q-1}[X]\}$$

donc $\dim \{x \in E \;/\; P_x \mid P_{w'}\} = 2 \dim K_{q-1}[X]$ c'est-à-dire $2q$. (ii)

Enfin de (i) et (ii) on déduit :

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{C}(f) &= p + 3q \\ &= \deg P_{v'} + 3 \deg P_{w'} \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels normés Suites et séries

Sujets d'oraux

(A) Espaces vectoriels normés

Ex. 1

Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux sous-ensembles de E.

1) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ compact} \\ B \text{ compact} \end{array}\right\} \Rightarrow (A+B) \text{ compact.}$$

2) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ B \text{ compact} \end{array}\right\} \Rightarrow (A+B) \text{ fermé.}$$

3) Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ B \text{ fermé} \end{array}\right\} \not\Rightarrow (A+B) \text{ fermé.}$$

1) Une première façon pour aborder cette question consiste, bien sûr, à revenir à la définition des compacts.
D'autre part, sachant que l'image continue d'un compact est compacte et que $A + B$ est l'image de l'application $f\ :\ (a, b) \mapsto a + b, (a, b) \in A \times B$, on obtient une deuxième solution possible.

- Première solution

On suppose A et B non vides.

Toute suite des points de $A + B$ s'écrit :

$$\left(a_n + b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}.$$

Puisque A est compact, il existe $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite de $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergeant vers $\alpha \in A$. De même, B étant compact, il existe $\left(b_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $\left(b_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergeant vers $\beta \in A$. Puisqu'elle est extraite de $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(a_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers α et $\left(a_{\varphi(\psi(n))} + b_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ves $\alpha + \beta \in A + B$.

Ainsi toute suite de $A + B$ possède au moins une valeur d'adhérence dans $A + B$, ce qui montre que $A + B$ est compact.

- Deuxième solution

L'application $f\ :\ E^2 \to E, (x, y) \mapsto x + y$ est continue (continuité de l'opération + dans E). D'autre part, $A \times B$ est compact en tant que produit de deux compacts et $A + B = f(A \times B)$, donc $A + B$ est compact en tant qu'image continue d'un compact.

- Remarquons enfin que si A ou B est vide, $A + B$ est vide et la propriété est vraie.

2) Ici la caractérisation séquentielle des fermés semble s'imposer.

On suppose A et B non vides.

Soit $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A + B$ convergeant vers $c \in \overline{A+B}$ avec :

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}.$$

Puisque B est compacte, il existe $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergeant vers $b\in B$. Alors $(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge également vers c et il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)} = c - b.$$

Puisque A est fermé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)} \in \overline{A} = A$ donc $c - b \in A$ et $c \in A + B$.

On a ainsi prouvé que $\overline{A+B} \subset A + B$ donc que $A + B$ est fermé.

Comme dans le 1), la propriété reste vraie si A ou B est vide.

3) Il s'agit ici d'exhiber un contre-exemple.

- Contre-exemple dans $\mathbb{R}$

Un résultat classique concernant les sous-groupes de $\mathbb{R}$ nous dit que si a et b sont des réels non nuls tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, le sous-groupe additif $G = a\,\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}$. C'est donc le cas, par exemple, pour $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$.

En remarquant que $G \neq \mathbb{R}$ (par exemple, $\sqrt{3} \notin G$) on a $G \subsetneq \overline{G}$, donc G n'est pas fermé alors que $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont fermés.

- Contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$

Posons $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy = 1\} = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \;/\; x \in \mathbb{R}^*\right\}$.

A est fermé en tant qu'image réciproque du singleton $\{1\}$ par la fonction continue $(x, y) \mapsto xy$.

Posons $B = \{(x, 0) \;/\; x \in \mathbb{R}\}$.

B est fermé en tant que noyau de la forme linéaire continue $(x, y) \mapsto y$. On a alors :

$$A + B = \left\{\left(x + y, \frac{1}{x}\right) \;/\; x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

et il est facile de voir que $A + B$ n'est pas fermé car $\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^2$.

Ex. 2

Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telles que l'image de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Usuellement, on appelle applications ouvertes les applications donnant pour tout ouvert une image ouverte.

- Supposons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est ouverte.

Alors $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. D'autre part, c'est un fermé de $\mathbb{R}^p$, comme tout espace de dimension finie, donc, puisque $\mathbb{R}^p$ est connexe par arcs, on en déduit que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire que f est surjective.

- Supposons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est surjective.

Lorsque l'espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire est continue donc, en dimension finie, tout isomorphisme est un homéomorphisme, donc une application ouverte.

La remarque ci-dessus montre que le cas $n = p$ est évident, en effet la surjectivité de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ montre qu'il s'agit alors d'un automorphisme donc d'un homéomorphisme.

On suppose maintenant $n > p$. La surjectivité de f s'écrit $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ et donne donc $\mathrm{rg} f = p$, donc $\dim \mathrm{Ker} f = n - p$. En introduisant E supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^n$, $R^n = E \oplus \mathrm{Ker} f$, on a $\dim E = p$ et on sait que la restriction f_E de f à E est un isomorphisme, donc un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^p$. Enfin, en notant π la projection sur E parallèlement à $\mathrm{Ker} f$, on a :

$$f = f_E \circ \pi \quad \text{donc aussi} \quad \pi = f_E^{-1} \circ f.$$

Considérons alors un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, il nous faut prouver que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et, puisque f_E^{-1} est un homéomorphisme, cela revient à montrer que :

$$\pi(U) = f_E^{-1}\big(f(U)\big) \text{ est un ouvert de } E.$$

Pour $x_1 \in \pi(U)$, il existe $x \in U$ tel que $x_1 = \pi(x)$ et donc :

$$x' = x - x_1 \in \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker} f.$$

Puisque U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset U$. Considérons alors $y_1 \in E$ tel que :

$$\|x_1 - y_1\| < r,$$

en notant $y = y_1 + x'$, on a $y_1 = \pi(y)$ et :

$$\| x - y) \| = \|x_1 - y_1\| < r$$

donc $y \in B_o(x, r) \subset U$ et $y_1 \in \pi(U)$.

On a ainsi prouvé que, dans E, la boule ouverte $B_o^E(x_1\,, r) = \big\{y \in E \;/\; \|x_1 - y\| < r\big\}$ est incluse dans $\pi(U)$. Ceci a été réalisé avec x_1 quelconque dans $\pi(U)$ donc $\pi(U)$ est un ouvert de E et $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Finalement, f est ouverte.

Ex. 3

Soit K une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, admettant 0_E comme centre de symétrie, ne contenant aucune droite vectorielle mais telle que toute droite vectorielle la rencontre en au moins un point distinct de 0_E.

1) Montrer que $N\ :\ x \mapsto \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \;\middle/\; \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\}$ est une norme de E.

2) Prouver que pour cette norme :

$$B_o\big(0_E\,.\,1\big) = \overset{\circ}{K} \quad \text{et} \quad B_f\big(0_E\,.\,1\big) = \overline{K}.$$

1) Avant de vérifier les axiomes de définition des normes, il faut penser à montrer que $N(x)$ a un sens quel que soit $x \in E$.

- $N(x)$ a un sens pour tout $x \in E$.

Remarquons d'abord que, par hypothèse, K contient au moins un vecteur $a \neq 0_E$ puisque pour toute droite vectorielle D, on a $K \cap D \setminus \big\{0_E\big\} \neq \varnothing$. L'hypothèse de symétrie par rapport à 0_E montre alors que $-a \in K$, puis la convexité donne $\big[-a, a\big] \subset K$ et donc $0_E \in K$.

Pour $x = 0_E$, on obtient $\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \;\middle/\; \dfrac{x}{\lambda} \in K\right\} = \mathbb{R}_+^*$ d'où l'existence de $N\big(0_E\big) = 0$.

Pour $x \neq 0_E$, $D = \mathbb{R}x$ est une droite vectorielle et il existe $a \in K \cap D \setminus \big\{0_E\big\}$. Alors on a aussi $-a \in K$ et il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$a = \frac{x}{k} \quad \text{donc} \quad -a = \frac{x}{-k}.$$

L'un des deux réels k et $-k$ étant strictement positif, ceci nous montre que l'ensemble :

$$A_x = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{x}{\lambda} \in K \right\}$$

est non vide et, puisqu'il est évidemment minoré pour 0, il admet une borne inférieure.

- $x \neq 0_E \;\Rightarrow\; N(x) > 0$

Pour $x \neq 0_E$, $D = \mathbb{R}x$ est une droite vectorielle et on sait que $D \not\subset K$ donc il existe $y \in D$ tel que $y \notin K$ et, de même, $-y \notin K$ par symétrie de K.

Sachant que $0_E \in K$, on a $y \neq 0_E$ et il existe $\mu > 0$ tel que $y = \mu x$ ou $-y = \mu x$.

Pour tout $\mu' \geqslant \mu$ on a alors $\frac{1}{\mu'} \notin A_x$ car, pour $\frac{1}{\mu'} \in A_x$ on obtient $\left[-\mu' x, \mu' x\right] \subset K$ et donc $y = \pm \mu x \in K$ ce qui est exclu.

On en déduit que A_x est minoré par $\frac{1}{\mu}$ d'où, encore, $N(x) \geqslant \frac{1}{\mu} > 0$.

- $N(\alpha x) = |\alpha| \, N(x)$

La propriété est vérifiée pour $\alpha = 0$, on se limite maintenant à $\alpha \neq 0$.

Par symétrie de K, on a :

$$A_{\alpha x} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{\alpha x}{\lambda} \in K \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \frac{|\alpha| \, x}{\lambda} \in K \right\}$$

donc, en posant $\mu = \frac{\lambda}{|\alpha|}$, il vient :

$$A_{\alpha x} = \left\{ \mu \, |\alpha| \;/\; \mu \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{x}{\mu} \in K \right\}$$

et on en déduit :

$$N(\alpha x) = \inf A_{\alpha x} = |\alpha| \inf A_x = |\alpha| \, N(x).$$

- $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

> Cette dernièr vérification est moins immédiate. C'est le moment d'observer que la convexité de K n'a été exploitée que bien partiellement et d'autre part, qu'il suffit, pour conclure, de montrer que :
>
> $$A_x + A_y \subset A_{x+y} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \forall \lambda \in A_x, \forall \mu \in A_y, \lambda + \mu \in A_{x+y}.$$

Soit $\lambda \in A_x$ et $\mu \in A_y$. Alors $\frac{x}{\lambda}$ et $\frac{y}{\mu}$ sont éléments de K donc, par convexité de K, on a :

$$\left[\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}\right] \subset K$$

puis $\dfrac{\lambda \frac{x}{\lambda} + \mu \frac{y}{\mu}}{\lambda + \mu} \in \left[\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}\right]$ donne $\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in K$ c'est-à-dire $\lambda + \mu \in A_{x+y}$.

Par définition de $N(x+y)$, on en déduit :

$$\forall \lambda \in A_x, \forall \mu \in A_y, N(x+y) \leqslant \lambda + \mu.$$

En observant que $N(x+y) - \lambda$ est un minorant de A_y, on obtient :

$$\forall \lambda \in A_x, N(x+y) - \lambda \leqslant N(y)$$

puis en observant que $N(x+y) - N(y)$ est un minorant de A_x, il vient :

$$N(x+y) - N(y) \leqslant N(x)$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

2) Pas de mystère, il s'agit ici de faire le lien entre les propositions $x \in K$, $N(x) < 1$ et $N(x) \leqslant 1$.

Si $x \in K$, on a évidemment $1 \in A_x$ donc $N(x) \leqslant 1$. Ceci nous donne :

$$K \subset \mathcal{B}_f(0_E, 1).$$

Si $x \in \mathcal{B}_o(0_E, 1)$, c'est-à-dire $N(x) < 1$, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in K$ donc, compte tenu de $\frac{1}{\lambda} > 1$, on obtient :

$$x \in \left[0, \frac{x}{\lambda}\right] \subset K.$$

On a ainsi prouvé que $\mathcal{B}_o(0_E, 1) \subset K$.

Il est facile de remarquer que $\mu \in A_x \Rightarrow [\mu, +\infty[\subset A_x$ et donc :

$$A_x = [N(x), +\infty[\quad \text{ou} \quad A_x =]N(x), +\infty[.$$

Dans les deux cas, $N(x) < 1$ donne $1 \in A_x$ donc $x \in K$.

Sachant que $\overline{\mathcal{B}_o(0_E, 1)} = \mathcal{B}_f(0_E, 1) = \overline{\mathcal{B}_f(0_E, 1)}$ et que $\mathcal{B}_o(0_E, 1) \subset K \subset \mathcal{B}_f(0_E, 1)$ donne :

$$\overline{\mathcal{B}_o(0_E, 1)} \subset \overline{K} \subset \overline{\mathcal{B}_f(0_E, 1)},$$

il vient :

$$\overline{K} = \mathcal{B}_f(0_E, 1).$$

De même, avec $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{B}_o(0_E, 1)}} = \mathcal{B}_o(0_E, 1) = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{B}_f(0_E, 1)}}$, on obtient :

$$\overset{\circ}{K} = \mathcal{B}_o(0_E, 1).$$

Ex. 4

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E et $f : K \to K$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y).$$

1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (x, y) \in K^2$, $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon + d(x, y)$.

2) Qu'en résulte-t-il ?

1) On rappelle que pour tout x, y de E, la distance de x à y est :

$$d(x, y) = \| y - x \|.$$

Étant donné x, y éléments de K, puisque K est stable par f, on définit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans K en posant :

$$x_0 = x,\ y_0 = y \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n),\ y_{n+1} = f(y_n).$$

On sait qu'un produit de compacts est compact, donc $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite du compact K^2, admet au moins une valeur d'adhérence $(a, b) \in K^2$, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$a = \lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} \quad , \quad b = \lim_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)}.$$

En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geqslant n_0 \text{ et } q \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(y_{\varphi(p)}, y_{\varphi(q)}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc en particulier :

$$d\left(x_{\varphi(n_0+1)}, x_{\varphi(n_0)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d\left(y_{\varphi(n_0+1)}, y_{\varphi(n_0)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

> Remarquons que l'hypothèse sur f nous donne :
>
> $$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}, d\left(x_1, x_{p+1}\right) \leqslant d\left(x_n, x_{n+p}\right) \quad \text{et} \quad d\left(y_1, y_{p+1}\right) \leqslant d\left(y_n, y_{n+p}\right).$$

La fonction φ est strictement croissante, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(n_0+1) = p + \varphi(n_0)$, et la remarque précédente donne :

$$d(x_0, x_p) \leqslant d\left(x_{\varphi(n_0+1)}, x_{\varphi(n_0)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{et} \qquad d(y_0, y_p) \leqslant d\left(y_{\varphi(n_0+1)}, y_{\varphi(n_0)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, l'hypothèse sur f donne $d(x_1, y_1) \leqslant d(x_p, y_p)$ et, par inégalité triangulaire :

$$d(x_1, y_1) \leqslant d(x_p, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_p) \leqslant \varepsilon + d(x_0, y_0)$$

c'est-à-dire :

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \varepsilon + d(x, y).$$

2) Le 1) étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\forall (x,y) \in K^2, d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant d(x, y)$$

et compte tenu de l'hypothèse :

$$\forall (x,y) \in K^2, d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y).$$

Ainsi f est une isométrie de K.

Ex. 5

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et :

$$F = \left\{ u \in E \Big/ \int_0^1 u = 0 \right\}.$$

1) Montrer que tout $u \in E$ admet une primitive et une seule appartenant à F, on la note $T(u)$.

2) Montrer que T est linéaire, continue et calculer $|||T|||$.

1) Toute primitive v de u s'écrit :

$$\forall x \in [0,1], v(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

et la condition $v \in F$ équivaut alors à :

$$k + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{soit} \quad k = -\iint_{\mathcal{D}} u(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

où on a posé $\mathcal{D} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant x\right\}$.

Avec $\mathcal{D} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant t \leqslant 1, t \leqslant x \leqslant 1\right\}$, le théorème de Fubini donne aussi :

$$k = -\int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^1 u(t)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (1-t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi u admet une primitive v et une seule appartenant à F, il s'agit de :

$$v \ : \ x \mapsto \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui définit l'application $T \ : \ u \to v$ de E dans F.

2) La linéarité de T est une conséquence évidente de la linéarité de l'intégrale. En remarquant que l'on a aussi :

$$T(u)(x) = \int_0^x tu(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)u(t)\,\mathrm{d}t,$$

pour $\| u \|_\infty \leqslant 1$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1], |T(u)(x)| \leqslant \frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \| T(u) \|_\infty \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que T est bornée sur la boule unité $B_F(0_E, 1)$ de E donc que T est continue et :

$$|||T||| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{i}$$

Pour $u = 1$ (fonction constante), on a $T(1)(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$ donc $\| T(1) \|_\infty = \frac{1}{2}$ et :

$$|||T||| > \frac{1}{2}. \tag{ii}$$

Finalement, les inégalités (i) et (ii) donnent $|||T||| = \frac{1}{2}$.

Ex. 6

On note E l'espace vectoriel des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle muni de la norme uniforme : $\| \ \ \|_\infty$.

Pour tout $u \in E$, on pose $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} u_n$, puis $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

1) Montrer que φ est continue et exprimer sa norme subordonnée N.

2) On pose ici $u = \left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Calculer $\varphi(u)$ et $d(u, H)$.

3) Pour x quelconque dans E, construire $y \in H$ tel que $d(x, y) \leqslant \frac{3}{2} d(x, H)$.

Même si l'énoncé ne donne pas explicitement la question, il est bon de commencer par préciser que la majoration :

$$\left| 2^{-n} u_n \right| \leqslant \frac{1}{2^n} \| u \|_\infty$$

prouve la convergence de la série :

$$\sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} u_n$$

donc l'existence de $\varphi(u)$ pour tout $u \in E$, puis de remarquer que φ est une forme linéaire non nulle, donc que H est un hyperplan de E.

1) Pour tout $u \in E$, on a :

$$|\varphi(u)| \leqslant \| u \|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$$

donc :

$$|\varphi(u)| \leqslant 2\|u\|_\infty$$

ce qui prouve que φ est continue et que

$$N(\varphi) \leqslant 2. \tag{i}$$

L'égalité $|\varphi(u)| = 2\|u\|_\infty$ est ici irréalisable avec $u \in E \setminus \{0\}$. En effet, avec :

$$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}|u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty$$

on voit qu'elle exige :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\left(\|u\|_\infty - |u_n|\right) = 0$$

donc, tous les termes de cette dernière série étant positifs ou nuls, ils sont nécessairement nuls : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \|u\|_\infty$, ce qui donne $\|u\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ puis $u = 0$.

Pour arriver au résultat souhaité, c'est-à-dire $N(\varphi) \leqslant 2$, nous allons donc exhiber une suite $\left(u^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de $E \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire une suite de suites) telle que :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\left|\varphi\left(u^p\right)\right|}{\left\|u^p\right\|_\infty} = 2.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $u^p = \left(u_n^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n^p = 1 \text{ si } n \leqslant p-1 \quad \text{et} \quad u_n^p = 0 \text{ si } n \geqslant p.$$

Il est clair que $u^p \in E$ et que $\left\|u^p\right\|_\infty = 1$.

On a alors :

$$\varphi\left(u^p\right) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1-2^{-p}}{1-2^{-1}} = 2\left(1-2^{-p}\right) \quad \text{donc} \quad \varphi\left(u^p\right) = 2\left(1-2^{-p}\right)\left\|u^p\right\|_\infty.$$

Il en résulte que $\forall p \in \mathbb{N}^*, N(\varphi) \geqslant 2\left(1-2^{-p}\right)$ et donc que $N(\varphi) \geqslant 2$. (ii)

Enfin, les inégalités (i) et (ii) donnent $N(\varphi) = 2$.

2) Avec $u = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n+1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n} = -2\,\ell n\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\,\ell n\, 2.$$

On a bien sûr utilisé le développement en série entière à l'origine de $x \mapsto \ell n(1-x)$:

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \ell n(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Posons maintenant $\delta = d(u, H) = \inf\left\{\|u-v\|_\infty \;/\; v \in H\right\}$.

Le calcul de δ se fait suivant une démarche classique :

1) on exhibe un réel a tel que $\forall v \in H, a \leqslant \|u-v\|_\infty$ ce qui donne $\delta \geqslant a$;

2) pour tout $\varepsilon > 0$, on montre qu'il existe $v \in H$ tel que $\|u-v\|_\infty < a+\varepsilon$ ce qui donne $\delta \leqslant a$.

Pour tout $v \in H$, on a $\varphi(u-v) = \varphi(u) = 2\,\ell n\, 2$ donc $2\,\ell n\, 2 \leqslant N(\varphi)\|u-v\|_\infty$ c'est-à-dire :

$$2\,\ell n\, 2 \leqslant 2\|u-v\|_\infty \quad \text{soit aussi} \quad \ell n\, 2 \leqslant \|u-v\|_\infty.$$

On en déduit $\ell n\, 2 \leqslant \delta$. (i)

Par définition de $N(\varphi)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$N(\varphi) - \varepsilon = 2 - \varepsilon < \frac{|\varphi(\omega)|}{\| \omega \|_\infty}.$$

On suppose de plus $\varepsilon < 2$, ce qui impose $\varphi(\omega) \neq 0$.

Sachant que H est un hyperplan de E et que $u \notin H$, on a $E = \mathbb{R}u \oplus H$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_1 \in H$ tels que $\omega = \lambda u + v_1$.

Puisque $\omega \notin H$, on a aussi :

$$\omega = \lambda \left(u + \frac{v_1}{\lambda} \right)$$

c'est-à-dire $\omega = \lambda(u - v)$ où on a posé $v = -\dfrac{v_1}{\lambda}$, donc $v \in H$.

On obtient alors :

$$\frac{|\varphi(\omega)|}{\| \omega \|_\infty} = \frac{|\varphi(u-v)|}{\| u - v \|_\infty} = \frac{|\varphi(u)|}{\| u - v \|_\infty}$$

et donc $2 - \varepsilon < \dfrac{2\,\ell n\, 2}{\| u - v \|_\infty}$ soit aussi, puisque $2 - \varepsilon > 0$, $\| u - v \|_\infty < \dfrac{2\,\ell n\, 2}{2 - \varepsilon}$.

> Remarquer que $\dfrac{2\,\ell n\, 2}{2-\varepsilon}$ est de la forme $\ell n\, 2 + \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$.

Avec $\delta \leqslant \| u - v \|_\infty$ on en déduit :

$$\delta < \frac{2\,\ell n\, 2}{2 - \varepsilon},$$

et cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon \in \left]0, 2\right[$, il vient (en faisant tendre ε vers 0) :

$$\delta \leqslant \ell n\, 2. \qquad \text{(ii)}$$

Les inégalités (i) et (ii) donnent la conclusion :

$$\delta = \ell n\, 2 = \frac{|\varphi(u)|}{N(\varphi)}.$$

3) Comme dans le b) on établit que, pour tout $x \in E$:

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{N(\varphi)} = \frac{|\varphi(x)|}{2}.$$

La question revient donc à trouver $y \in H$ tel que :

$$\| x - y \|_\infty \leqslant \frac{3}{4} |\varphi(x)|.$$

Posons alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_n - \frac{3}{4} \frac{\varphi(x)}{2^n}.$$

Il est clair que $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$ donc $y \in E$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - y_n| \leqslant \frac{3}{4} |\varphi(x)| \quad \text{donc} \quad \| x - y \|_\infty \leqslant \frac{3}{4} |\varphi(x)|.$$

D'autre part :

$$\varphi(y) = \varphi(x) - \frac{3}{4} \varphi(x) \sum_{x=0}^{+\infty} 4^{-n} = \varphi(x) \left(1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 0,$$

donc $y \in H$ et cette suite y répond à la question.

(B) Espaces de matrices

Ex. 7

n est un entier naturel $\geqslant 2$.

1) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|. \qquad \text{(R)}$$

2) Une semi-norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \geqslant 0 \qquad (1)$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \qquad (2)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \qquad (3)$$

Soit N une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R), démontrer que :

- N est lipschitzienne ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) = N(BA)$;
- $\mathrm{Tr}(A) = 0 \ \Rightarrow\ N(A) = 0$.

Quelles sont les semi-normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R) ?

1) La lecture complète de l'énoncé peut faire penser à montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| = \|BA\|.$$

Pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'après (R) on a $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\left\|P^{-1}(PA)P\right\| = \|PA\| \quad \text{donc} \quad \|AP\| = \|PA\|. \qquad \text{(i)}$$

La densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un résultat classique ; par exemple, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M = \lim_{k \to +\infty} M + \frac{1}{k} I_n$$

et les matrices $M_k = M + \dfrac{1}{k} I_n$ sont inversibles à partir d'un certain rang car le polynôme $\det\left(M + XI_n\right)$ admet au plus n racines. Ainsi, toute matrice B est limite d'une suite $\left(P_n\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles, donc, par continuité de la norme, on obtient d'après (i) :

$$\|AB\| = \lim_{k \to +\infty} \|AP_k\| = \lim_{k \to +\infty} \|P_k A\| = \|BA\|. \qquad \text{(ii)}$$

On obtient alors une contradiction en exhibant des matrices A et B telles que :

$$AB \neq 0 \quad \text{et} \quad BA = 0.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient $AB = A \neq 0$ et $BA = 0$ (car $n \geqslant 2$) ce qui est en contradiction avec (ii) puisque $BA \neq 0$ donne $\|BA\| > 0$.

En conclusion, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R).

2) On suppose que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme quelconque, par exemple $\| \ \|_\infty$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}},\ \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \left|a_{ij}\right|$$

Il est à noter d'autre part que la deuxième inégalité triangulaire reste vraie pour les semi-normes car elle se déduit des axiomes (2) et (3).

- En notant $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A = \left[a_{ij}\right] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E_{ij}$$

donc avec les axiomes (2) et (3) :

$$N(A) \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \left|a_{ij}\right| N\left(E_{ij}\right) \leq \|A\|_\infty \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} N\left(E_{ij}\right)$$

d'où $N \leq k \| \cdot \|_\infty$ en posant $k = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} N\left(E_{ij}\right)$.

D'autre part, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a par inégalité triangulaire :

$$N(A) = N(A - B + B) \leq N(A - B) + N(B)$$

donc $N(A) - N(B) \leq N(A - B)$ et symétriquement $N(B) - N(A) \leq N(B - A)$.

Puisque $N(A - B) = N(B - A)$, on en déduit :

$$-N(A - B) \leq N(A) - N(B) \leq N(A - B) \ \text{ c'est-à-dire } \ |N(A) - N(B)| \leq N(A - B).$$

Compte tenu de $N \leq k \| \cdot \|_\infty$ il vient enfin :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ |N(A) - N(B)| \leq k \|A - B\|_\infty .$$

On a ainsi montré que N est k-lipchitzienne de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty\right)$ dans $\mathbb{R}$ donc aussi qu'elle est uniformément continue.

- N étant continue, la démonstration donnée en 1) reste valable et on a :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ N(AB) = N(BA).$$

- La question revient à prouver que $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N$ et on sait que $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il va être utile de commencer par observer que $\operatorname{Ker} N$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le noyau de N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est en effet :

– non vide car, en substituant à λ la valeur 0 dans l'axiome (2), il vient $N(0) = 0$;

– stable par combinaison linéaire, car $N(A) = N(B) = 0$ donne, avec les axiomes (1), (2) et (3), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq N(A + \lambda B) \leq N(A) + |\lambda|\, N(B) = 0 \quad \text{donc} \quad A + \lambda B \in \operatorname{Ker} N.$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'exhiber un système générateur de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ formé de matrices appartenant à $\operatorname{Ker} N$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, si $i \neq j$, on a $E_{ij} \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ et $E_{ij} = E_{ii} E_{ij}$ avec $E_{ij} E_{ii} = 0$.

Donc, avec $N\left(E_{ii} E_{ij}\right) = N\left(E_{ij} E_{ii}\right)$, il vient $N\left(E_{ij}\right) = N(0) = 0$ c'est-à-dire que $E_{ij} \in \operatorname{Ker} N$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $E_{11} - E_{ii} \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$. D'autre part, $E_{11} - E_{ii}$ est semblable à $E_{1i} + E_{i1}$ car cette seconde matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable, de valeurs propres 1 et -1, simples, et 0 d'ordre $n - 2$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$E_{11} - E_{ii} = P^{-1}\left(E_{1i} + E_{i1}\right) P$$

et, d'après (R), on en déduit :

$$N(E_{11} - E_{ii}) = N(E_{1i} + E_{i1})$$

or $E_{1i} \in \operatorname{Ker} N$, $E_{1i} \in \operatorname{Ker} N$ et $\operatorname{Ker} N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$E_{1i} + E_{i1} \in \operatorname{Ker} N \quad \text{et} \quad N(E_{11} - E_{ii}) = N(E_{1i} + E_{i1}) = 0.$$

On a ainsi prouvé que les $n-1$ matrices $E_{11} - E_{ii}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, appartiennent à $\operatorname{Ker} N$.

La famille formée par les $E_{i,j}$, $i \neq j$, et les $E_{11} - E_{ii}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, est libre, de cardinal $n^2 - 1$ et constituée d'éléments de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$, c'est donc une base de cet hyperplan et puisqu'elle est aussi formée d'éléments du sous-espace $\operatorname{Ker} N$, on a :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N.$$

Remarquons enfin que si N n'est pas nulle, on a $\operatorname{Ker} N \neq E$ et, puisque $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ est un hyperplan, l'inclusion précédente devient une égalité :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} = \operatorname{Ker} N.$$

- Semi-normes vérifiant (R)

Puisque $I_n \notin \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R} I_n \oplus \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $M = \alpha I_n + H$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$. En prenant la trace des deux membres, on obtient :

$$\alpha = \frac{\operatorname{Tr} M}{n} \quad \text{donc} \quad H = M - \frac{\operatorname{Tr} M}{n} I_n .$$

Si N est une semi-norme vérifiant (R), on a $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \subset \operatorname{Ker} N$ donc, avec les axiomes (2) et (3), il vient :

$$N(M) \leqslant |\alpha|\, N(I_n) + N(H) \quad \text{c'est-à-dire} \quad N(M) \leqslant |\alpha|\, N(I_n) \tag{i}$$

et si $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire $M \notin H$, en écrivant $I_n = \dfrac{1}{\alpha} M - \dfrac{1}{\alpha} H$, on obtient :

$$N(I_n) \leqslant \frac{1}{|\alpha|} N(M) + \frac{1}{|\alpha|} N(H) \quad \text{c'est-à-dire} \quad N(I_n) \leqslant \frac{1}{|\alpha|} N(M)$$

ou encore :

$$N(M) \geqslant |\alpha|\, N(I_n). \tag{ii}$$

Les inégalités (i) et (ii) donnent enfin $N(M) = |\alpha|\, N(I_n)$ et ceci reste vrai lorsque $\alpha = 0$ puisque, dans ce cas, on a $\operatorname{Tr} M = 0$ donc $N(M) = 0$.

En posant $\lambda = \dfrac{1}{n} N(I_n)$, on a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(M) = \lambda\, |\operatorname{Tr} M|$ donc $N = \lambda\, |\operatorname{Tr}|$ avec $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'application $\lambda\, |\operatorname{Tr}| \; : \; M \mapsto \lambda\, |\operatorname{Tr}(M)|$ est bien une semi-norme (la vérification des axiomes (1), (2) et (3) est immédiate), et elle vérifie (R) car on sait que deux matrices semblables ont la même trace.

Les semi-normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (R) sont donc les applications $\lambda\, |\operatorname{Tr}|$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Ex. 8

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme arbitraire.

1) Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $\geqslant k+1$ est un ouvert.

2) Déterminer l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang k.

Quelles sont les méthodes pratiques pour prouver qu'une partie Ω d'un espace vectoriel normé E est ouverte ?

1) La définition : pour tout x de Ω, il existe une boule ouverte non vide, de centre x incluse dans Ω.

2) Le passage au complémentaire permet d'utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

3) Exhiber une application continue $f : E \to F$, où F est un espace vectoriel normé, et un ouvert U de F tel que $\Omega = f^{-1}(U)$.

1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \geqslant 1$, il existe A' sous-matrice de A, carrée d'ordre r et inversible.

En posant $A = [a_{ij}]$, une telle matrice extraite s'obtient en considérant les a_{ij} communs à r lignes (d'indices $i_1, i_2, \dots, i_r$) et r colonnes (d'indices $j_1, j_2, \dots, j_r$).

Sous Maple, on définirait A' par :

$$\text{submatrix}\big(A, \{i_1, i_2, \dots, i_r\}, \{j_1, j_2, \dots, j_r\}\big).$$

Il existe donc deux parties I et J de $[\![1, n]\!]$, de cardinal r, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ et $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ telles que :

$$A' = [a_{i_k j_\ell}]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant r}} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}).$$

I et J étant fixées, considérons l'application $D : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), D(M) = \det [m_{i_k j_\ell}]_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant \ell \leqslant r}}$$

Cette application est continue puisque polynomiale en les coefficients de M.

Or $D(A) \neq 0$, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\| M - A \| < \varepsilon \Rightarrow D(M) \neq 0$$

et si $r \geqslant k+1$, $D(M) \neq 0$ donne $\mathrm{rg}(M) \geqslant r \geqslant k+1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, nous notons Ω_k l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang $\geqslant k+1$.

Si $k \geqslant n$, on a $\Omega_k \neq \emptyset$ donc Ω_k est ouvert.

Si $k \leqslant n-1$, pour tout $A \in \Omega_k$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que Ω_k contienne la boule ouverte $B_o(A, \varepsilon)$ donc Ω_k est ouvert.

2) Notons maintenant R_k l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k, et S_k l'ensemble des matrices de rang $\leqslant k$.

On a clairement $S_k = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \Omega_k$ donc puisque, d'après le 1), Ω_k est ouvert, on obtient que S_k est fermé et l'inclusion $R_k \subset S_k$ donne :

$$\overline{R}_k \subset \overline{S}_k = S_k.$$

Pour montrer $S_k \subset \overline{R}_k$, on peut maintenant penser à la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Soit $A \in S_k$ donc de rang $r \leqslant k$. On sait qu'il existe P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PJ_rQ \quad \text{avec} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc :

$$A = \lim_{p \to +\infty} P\left(J_r + \frac{1}{p} J_k\right) Q.$$

Or les matrices :

$$J_r + \frac{1}{p}J_k = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{p} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1+\frac{1}{p} & & & & & & \\ & (0) & & \frac{1}{p} & & (0) & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{p} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

sont de rang k et il en est de même pour :

$$P\left(J_r + \frac{1}{p}J_k\right)Q,$$

ce qui prouve que A est limite d'une suite de matrices de R_k, donc que $A \in \overline{R}_k$.
On vient de montrer $S_k \subset \overline{R}_k$ d'où finalement $\overline{R}_k = S_k$.

Ex. 9

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.
Pour $(q, n) \in \mathbb{N}^2$, $q \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, soit $E_q = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^q = I_n\right\}$.

1) Que dire de $M \in E_q$ si elle admet 1 pour unique valeur propre ?

2) Montrer que I_n est un point isolé de E_q c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$E_q \cap B(I_n, \varepsilon) = \{I_n\}.$$

($B(I_n, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre I_n et de rayon ε.)

Indication. $\varepsilon = 2\sin\dfrac{\pi}{q}$.

3) Soit $A_0 \in E_q$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall A \in B(A_0, \varepsilon) \cap E_q$, le spectre de A est inclus dans celui de A_0.

Par définition, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est élément de E_q si et seulement si le polynôme $X^q - 1$ est annulateur de M.

1) Dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $X^q - 1$ est scindé à racines simples donc toute matrice M de E_q est diagonalisable.
Si, de plus, le spectre de $M \in E_q$ est réduit à 1, M est semblable à I_n et donc $M = I_n$.

Plus généralement, toute matrice diagonalisable $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont le spectre est réduit à un singleton $\{\lambda\}$, est égale λI_n.

2) D'après le 1), une matrice M de E_q est distincte de I_n si et seulement si elle admet au moins une valeur propre distincte de 1. Nous sommes donc amenés à établir un lien entre $\|I_n - M\|$ et les valeurs propres de $I_n - M$.
Pour ce faire, il est bon de commencer par préciser une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant identifié, par isomorphisme canonique, à $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme quelconque, on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une norme d'algèbre en posant pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\| M \| = \sup \left\{ \frac{\| MX \|}{\| X \|} \,/\, X \in \mathbb{C}^n, X \neq 0 \right\}.$$

Si on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que $M = \underset{\mathcal{B}_n}{\text{mat}} f_M$ où $\mathcal{B}_n$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $\| M \| = |||f_M|||$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de M. Si $V \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre associé, on a :

$$MV = \lambda V \text{ et } V \neq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\| MV \|}{\| V \|} = |\lambda| \text{ et } \| M \| \geqslant |\lambda|.$$

Soit maintenant $M \in E_q \setminus \{I_n\}$. D'après la remarque préliminaire, il existe λ valeur propre de M avec $\lambda \neq 1$. De plus, $X^q - 1$ étant annulateur de M, on sait que les valeurs propres de M sont des racines de ce polynôme. On obtient ainsi $\lambda \in \mathbb{U}_q \setminus \{1\}$ avec :

$$\mathbb{U}_q = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant q-1 \right\} \quad \text{soit encore} \quad \lambda = e^{\frac{2ik\pi}{q}}, 1 \leqslant k \leqslant q-1.$$

Sachant que $1 - \lambda$ est valeur propre de $I_n - M$ (car $(I_n - M)V = (1-\lambda)V$) on a alors

$$\|I_n - M\| \geqslant |1 - \lambda| \quad \text{donc} \quad \|I_n - M\| \geqslant \min \left\{ \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right|, 1 \leqslant k \leqslant q-1 \right\}$$

c'est-à-dire :

$$\|I_n - M\| \geqslant \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{q}} = 2\sin\frac{\pi}{q}.$$

En conséquence, avec $\varepsilon = 2\sin\frac{\pi}{q} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $E_q \cap B_o(I_n, \varepsilon) = \{I_n\}$.

3) Il s'agit encore d'établir un lien entre $\|A_0 - A\|$ et les valeurs propres de A_0 et A. Un choix judicieux de la norme sur $\mathbb{C}^n$ va, en exploitant le fait que A_0 est diagonalisable, faciliter le travail.

En tant qu'élément de E_q, A_0 est diagonalisable. Il existe donc une base $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A_0 (c'est-à-dire de f_{A_0}), $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_{A_0}(U_i) = \lambda_i U_i$, et nous pouvons supposer que $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i U_i, \| x \| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit de la norme associée à la structure hermitienne de $\mathbb{C}^n$ définie par le fait que la base $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthonormale.

Supposons maintenant que le spectre de A, élément de E_q, ne soit pas inclus dans celui de A_0. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{U}_q$ tel que $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $\lambda \notin \operatorname{Sp} A_0$ et soit :

$$V = \sum_{i=1}^n v_i U_i$$

un vecteur propre de f_A associé à cette valeur propre. On obtient alors :

$$(f_{A_0} - f_A)(V) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i U_i - \lambda \sum_{i=1}^n v_i U_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) v_i U_i.$$

En remarquant, comme dans le 2), que $\lambda \in \mathbb{U}_q \setminus \operatorname{Sp} A_0$ donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |\lambda_i - \lambda| \geqslant 2\sin\frac{\pi}{q},$$

il vient :

$$\left\| (f_{A_0} - f_A)(V) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda|^2 \, |v_i|^2 \geqslant 4 \sin^2 \frac{\pi}{q} \| V \|^2$$

donc :

$$\left\| \left| f_{A_0} - f_A \right| \right\| \geqslant 2 \sin \frac{\pi}{q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|A_0 - A\| \geqslant 2 \sin \frac{\pi}{q} .$$

On a ainsi montré que :

$$\forall A \in E_q \,,\, \operatorname{Sp} A \not\subset \operatorname{Sp} A_0 \;\Rightarrow\; \|A_0 - A\| \geqslant 2 \sin \frac{\pi}{q}$$

en contraposant, on en déduit :

$$\forall A \in E_q \,,\, \|A_0 - A\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \operatorname{Sp} A \subset \operatorname{Sp} A_0 .$$

Ex. 10

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{L}(V)$ et $G = \mathrm{GL}(V)$.

Pour $a \in E$, on pose $F_a = \left\{ g \circ a \circ g^{-1} \;/\; g \in G \right\}$.

Montrer que $(F_a$ est fermé$) \iff (a$ est diagonalisable$)$.

Indication. Pour la condition nécessaire ($\Rightarrow$) on pourra introduire les éléments g_k de G dont la matrice dans une base convenable est :

$$G_k = \begin{pmatrix} 1^k & & & \\ & 2^k & (0) & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & n^k \end{pmatrix} .$$

F_a est l'ensemble des images de a par les automorphismes intérieurs de V. Matriciellement, soit $\mathcal{B}$ une base de V et $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} a$, F_a est l'ensemble des endomorphismes b de V tels que $B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} b$ soit semblable à A.

On sait que si $b \in F_a$, les polynômes caractéristiques χ_b et χ_a sont égaux, a et b ont donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité ; de plus a est diagonalisable si et seulement si b est diagonalisable.

- Condition suffisante

On suppose a diagonalisable. Il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples (et scindé comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$) tel que $P(a) = 0$.

Considérons alors une suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F_a, convergente vers $b \in E$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $g_p \in G$ tel que $b_p = g_p \circ a \circ g_p^{-1}$. On en déduit :

$$P(b_p) = g_p \circ P(a) \circ g_p^{-1} = 0$$

donc, par continuité des opérations dans l'algèbre normé E :

$$P(b) = \lim_{p \to +\infty} P(b_p) = 0.$$

Ainsi b est diagonalisable puisqu'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

On a aussi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\chi_{b_p} = \chi_a$ donc, à la limite (voir remarque suivante) $\chi_b = \chi_a$. Ainsi a et b ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\chi_{b_p}(z) = \det\left(b_p - z\,\mathrm{Id}_V\right)$. Donc, puisque :

$$\lim_{p \to +\infty}\left(b_p - z\,\mathrm{Id}_V\right) = b - z\,\mathrm{Id}_V\,,$$

par continuité de l'application en $\det$, il vient :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \lim_{p \to +\infty} \chi_{b_p}(z) = \det\left(b - z\,\mathrm{Id}_V\right)$$

c'est-à-dire $\forall z \in \mathbb{C},\ \chi_a(z) = \chi_b(z)$.

L'égalité des polynômes χ_a et χ_b en résulte.

Ainsi les matrices A et B de a et b dans la base $\mathcal{B}$ sont semblables à une même diagonale D, elles sont donc semblables entre elles ce qui montre aussi que $b \in F_a$. La caractérisation séquentielle des fermés donc alors la conclusion : F_a est un fermé de E.

- Condition nécessaire

Afin d'exploiter l'indication fournie, il est judicieux de commencer par former le produit $G_k A G_k^{-1}$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque.

Étant donné $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$G_k A = \left[a'_{ij}\right] \quad \text{avec} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a'_{ij} = i^k a_{ij}$$

$$\text{et} \quad G_k A G_k^{-1} = \left[b_{ij}\right] \quad \text{avec} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{ij} = j^{-k} a'_{ij} = \left(\frac{i}{j}\right)^k a_{ij}$$

Afin de montrer la contraposée de l'implication souhaitée, supposons a non diagonalisable.

Puisqu'il appartient à $\mathbb{C}\left[X\right]$, le polynôme caractéristique χ_a est scindé et a est trigonalisable ; il existe $\mathcal{B}'$ base de V telle que $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, a = T$ où T est triangulaire supérieure :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & t_{ij} & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Soit maintenant $g_k \in G$ tel que $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, g_k = G_k$ et $b_k = g_k \circ a \circ g_k^{-1}$.

$$\text{On a alors } \forall k \in \mathbb{N},\ \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, b_k = G_k T G_k^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & t'_{ij} & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ avec } t'_{ij} = \left(\frac{i}{j}\right)^k t_{ij}.$$

Pour $i < j$, $\displaystyle\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{i}{j}\right)^k = 0$ donne :

$$\lim_{k \to +\infty} \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, b_k = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \quad \text{soit encore} \quad \lim_{k \to +\infty} b_k = b$$

où b est l'élément de E tel que $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}\, b = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$. Étant diagonalisable, alors que a ne l'est pas, b n'est pas dans F_a. On a ainsi construit une suite $\left(b_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de F_a convergeant vers b avec $b \notin F_a$ ce qui nous montre que F_a n'est pas un fermé de E.

L'implication $\left(a \text{ non diagonalisable}\right) \Rightarrow \left(F_a \text{ non fermé}\right)$ en résulte et, en contraposant, on obtient $\left(F_a \text{ fermé}\right) \Rightarrow \left(a \text{ diagonalisable}\right)$.

Ex. 11

On dit qu'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est matricielle s'il existe une norme sur $\mathbb{C}^n$ à laquelle elle est subordonnée.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nilpotente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ qui minore $N(A)$ pour toute norme matricielle N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Cela reste-t-il valable pour une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

1) $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont identifiés par isomorphisme canonique. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$, la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est subordonnée est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(A) = \sup\left\{\frac{\| AX \|}{\| X \|}, X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\} = \sup\left\{\| AX \|, X \in \mathbb{C}^n, \| X \| = 1\right\}$$

et il existe un lien simple entre $N(A)$ et toute valeur propre de A.
D'autre part, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est non nilpotente, elle admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ non nulle. Soit alors $V \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ : $AV = \lambda V$, $V \neq 0$.
Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ on a alors :

$$\| AV \| \leqslant N(A)\| V \| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\lambda|\, \| V \| \leqslant N(A)\| V \|$$

et, puisque $\| V \| \neq 0$, il vient $N(A) \geqslant |\lambda|$. Le réel $\alpha = |\lambda|$ répond à la question.

2) La réponse est vraisemblablement négative. Pour le prouver il suffit, en ayant fixé une matrice A nilpotente, de construire une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de normes sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k(A) = 0$ où N_k est la norme subordonnée à n_k.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $A = \underset{\mathcal{B}_n}{\mathrm{mat}}\, u$ où $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on note $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant 2$, l'application :

$$n_k \; : \; \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| + \left(1 - \frac{1}{k}\right)|x_n|$$

est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

La sphère unité $S_k = \left\{x \in \mathbb{C}^n \,/\, n_k(x) = 1\right\}$ est caractérisée par $|x_n| = \dfrac{k - \sum\limits_{i=1}^{n-1}|x_i|}{k-1}$ donc, N_k désignant la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à n_k, on a :

$$N_k(A) = |\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{x\in S_k} n_k\big(u(x)\big) = \sup_{x\in S_k} \frac{1}{k}|x_n| = \sup_{x\in S_k} \frac{k - \sum\limits_{i=1}^{n-1}|x_i|}{k(k-1)} \leqslant \frac{1}{k-1}.$$

Il en résulte $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k(A) = 0$, ce qui nie l'existence de $\alpha > 0$ tel que $N(M) \geqslant \alpha$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

C Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ex. 12

Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(x^2 + f(y)\right) = y + f(x)^2. \qquad (E)$$

On commencera par prouver que si f est une solution alors :

1) f est bijective ;

2) f est strictement croissante ;

3) $f(0) = 0$.

On suppose que f est solution.

1) Avec $x = 0$, l'équation (E) donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f \circ f(y) = y + a$$

où on a posé $a = f(0)^2$. On en déduit que $f \circ f = t_a$ où t_a désigne la translation $y \mapsto y + a$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc $y = f\left(f(y - a)\right)$ ce qui montre que f est surjective, et pour $y = f(x)$ on obtient $x + a = f \circ f(x)$ donc $x = f(y) - a$ ce qui montre que f est injective (tout y a au plus un antécédent).

Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

> On peut aussi remarquer que le calcul précédent donne $f^{-1} = t_{-a} \circ f$.

2) Puisqu'elle est continue et bijective, on sait que f est strictement monotone. En posant $b = f(0)$ deux cas sont possibles :

- si f est croissante, alors $f\left(\left[b, +\infty\right[\right) = \left[f(b), +\infty\right[$; $\qquad (i)$
- si f est décroissante, alors $f\left(\left[b, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, f(b)\right]$. $\qquad (ii)$

Or $f\left(x^2 + f(0)\right) = f(x)^2$ montre que $f\left(\left[b, +\infty\right[\right) \subset \left[0, +\infty\right[$, le seul cas à retenir est donc (i) et f est strictement croissante.

3) Avec $y = 0$, l'équation (E) donne pour tout x réel :

$$f(x)^2 = f\left(x^2 + f(0)\right) \quad \text{et} \quad f(-x)^2 = f\left(x^2 + f(0)\right)$$

donc $f(-x)^2 = f(x)^2$. Compte tenu de la croissance stricte de f, cela exige $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$ puis $f(0) = 0$ par continuité de f en 0.

> On vient de trouver des conditions nécessaires sur les solutions de l'équation. Il reste à déterminer quelles sont, parmi les fonctions vérifiant ces conditions, celles qui sont effectivement solutions de (E).

Si f est solution du problème, elle est strictement croissante et vérifie :

$$f \circ f = \mathrm{Id} \quad , \quad f(0) = 0.$$

Pour une telle fonction, en supposant $f(x) > x$, on obtient $f\left(f(x)\right) > f(x) > x$ ce qui est contradictoire avec $f \circ f = \mathrm{Id}$. De même $f(x) < x$ donne $f\left(f(x)\right) < x$ en contradiction avec $f \circ f = \mathrm{Id}$.

En conséquence, on $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ et donc $f = \mathrm{Id}$.

La fonction Id étant évidemment solution du problème, c'est la seule solution.

Ex. 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 + f'(x)^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Montrer que $f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \dfrac{4}{3}$.

> Un bon moyen, pour voir ce qui se passe, est d'élargir les hypothèses de façon, par exemple, à pouvoir écrire $f(1)^2 - f(0)^2$ sous la forme d'une intégrale.

- Supposons, dans un premier temps, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f(1)^2 - f(0)^2 = \int_0^1 2f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or il est bien connu que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2ab \leqslant a^2 + b^2$, on en déduit :

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \int_0^1 \left(f(x)^2 + f'(x)^2\right)\mathrm{d}x$$

puis, d'après l'hypothèse, et la croissance de l'intégrale :

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\mathrm{d}x \ \text{ c'est-à-dire } \ f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant \frac{4}{3}.$$

- Revenons à l'hypothèse, f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le calcul précédent a mis en évidence que la conclusion se lit $F(1) \leqslant F(0)$ où on a posé :

$$F(x) = f(x)^2 - x - \frac{x^3}{3}.$$

Étudions donc les variations de cette fonction F.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 2f(x)f'(x) - 1 - x^2.$$

D'après l'hypothèse, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) \leqslant f(x)^2 + f'(x)^2 - \left(1 + x^2\right) \leqslant 0.$$

Ainsi F est décroissante et on en déduit $F(1) \leqslant F(0)$, c'est-à-dire la conclusion souhaitée.

Ex. 14

Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $x^y = y^x$.

> La résolution de cette équation dans $\mathbb{R}_+^{*2}$ se fait en séparant les variables, ce qui conduit à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$ puis en étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. On peut penser qu'une discussion précise de cette équation va nous permettre d'en déduire les solutions dans $\mathbb{N}^{*2}$.

Il est clair que tout couple $(x, x) \in \mathbb{N}^{*2}$ est solution. On se limite dans la suite à $x \neq y$, et, en remarquant que x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer $x < y$.

Pour $x = 1$, la seule solution en y est 1. On se limite finalement à $1 < x < y$.

L'équation $x^y = y^x$ équivaut à $y \ln x = x \ln y$ soit aussi à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

Étudions les variations de $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$.

Avec $f'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$ on obtient le tableau :

t	0		e		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Donc $f_{|]1,e]}$ induit un homéomorphisme de $]1,e]$ sur $\left]0,\frac{1}{e}\right]$,

et $\quad f_{|[e,+\infty[}$ induit un homéomorphisme de $[e,+\infty[$ sur $\left]0,\frac{1}{e}\right]$.

Étant donné $z\in\mathbb{R}$, l'équation $\frac{\ell n\, t}{t}=z$ admet deux racines distinctes x et y telles que $1<x<y$, si et seulement si $z\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$ et on a alors :

$$x=f^{-1}_{|]1,e]}(z)\quad,\quad y=f^{-1}_{|[e,+\infty[}(z).$$

En conséquence, si $(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}$ est solution de l'équation avec $1<x<y$, on a nécessairement :

$$x\in\,]1,e]\quad\text{et}\quad y\in[e,+\infty[.$$

Puisque $e\approx 2,72$, la seule possibilité est $x=2$ et y est l'unique solution de $t\geqslant 3$, $2^t=t^2$ c'est-à-dire $y=4$.

En conclusion, les solutions de l'équation sont $(2,4)$, $(4,2)$ et tous les couples (x,x) avec $x\in\mathbb{N}^*$.

D Suites

Ex. 15

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $P_n(x)=x^n+x^2-1$ a une racine unique u_n dans l'intervalle $]0,1[$.

2) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer un équivalent simple de $u_n-\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

1) Aucune difficulté : on étudie les variations de P_n.

P_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle induit un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[P(0),P(1)]=[-1,1]$. Puisque $0\in\,]P(0),P(1)[$, on en déduit qu'il existe u_n unique, $u_n\in\,]0,1[$ tel que $P_n(u_n)=0$.

2) D'après le 1), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il est maintenant naturel d'examiner si elle est monotone. Pour ce faire, il est bon de garder à l'esprit que, l'homéomorphisme $P_{n|_{[0,1]}}$ étant croissant, on a :

$$\forall x\in[0,1],\, x>u_n \iff P_n(x)>0.$$

Formons $P_n(u_{n+1})=u_{n+1}^n+u_{n+1}^2-1$. Puisque $u_{n+1}\in\,]0,1[$, on a $u_{n+1}^n>u_{n+1}^{n+1}$ donc :

$$P_n(u_{n+1})>P_{n+1}(u_{n+1})=0$$

et il en résulte $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente de limite $\ell \in [0,1]$.

En supposant $\ell \in [0,1[$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \ell^2 - 1$ c'est-à-dire :

$$\ell^2 - 1 = 0 \text{ soit encore } \ell = 1.$$

Ceci montre par l'absurde que $\ell \notin [0,1[$ donc que $\ell = 1$.

Autre solution

La relation $u_n^n = 1 - u_n^2$ s'écrivant aussi $n = \dfrac{2\,\ell n\left(1-u_n^2\right)}{\ell n\, u_n^2}$, étudions la fonction :

$$f\ :\ ]0,1[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ell n(1-x)}{\ell n\, x}.$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = -\frac{x\,\ell n\, x + (1-x)\,\ell n(1-x)}{x(1-x)\,\ell n^2 x}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ avec $u(x) = (x-1)\,\ell n(1-x) - x\,\ell n\, x$.

Le calcul donne alors $u'(x) = \ell n(1-x) - \ell n\, x$ d'où les variations de u, le signe de u, le signe de f' et enfin les variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			$+\infty$

On en déduit que f est un homéomorphisme croissant de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ et la relation $n = 2f\left(u_n^2\right)$ s'écrit aussi $u_n^2 = f^{-1}\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

L'étude de f montre que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$, et il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

3) L'intérêt de la deuxième solution donnée dans le 2) est qu'elle nous donne une expression de u_n en fonction de n (même si celle-ci n'est pas explicite). De plus, on sait que lorsque x tend vers 1, on a $\ell n\, x = \ell n(1 + x - 1) \sim x - 1$ donc $\ell n\, u_n$ fait naturellement apparaître un équivalent de $u_n - \ell = u_n - 1$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ on a :

$$\ell n\, u_n = \ell n\left(1 + u_n - 1\right) \sim u_n - 1 \quad \text{donc} \quad u_n - 1 \sim \frac{\ell n\left(1-u_n^2\right)}{n}.$$

Avec $\ell n\left(1-u_n^2\right) = \ell n\left(1-u_n\right) + \ell n\left(1+u_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\left(1+u_n\right) = \ell n\, 2$, on obtient :

$$u_n - 1 \sim \frac{\ell n\left(1-u_n\right)}{n} \quad \text{soit aussi} \quad u_n - 1 = \frac{\ell n\left(1-u_n\right)}{n}\left(1 + o(1)\right).$$

Il vient alors :

$$\ln\left(1-u_n\right)=\ln\left|\ln\left(1-u_n\right)\right|-\ln n+o(1)$$

et, puisque $\ln\left|\ln\left(1-u_n\right)\right|=o\left(\ln\left(1-u_n\right)\right)$, on en déduit $\ln\left(1-u_n\right)\sim-\ln n$.

En conséquence, l'équivalence $u_n-1\sim\dfrac{\ln\left(1-u_n\right)}{n}$ donne $u_n-1\sim-\dfrac{\ln n}{n}$.

Ex. 16

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}E\left(\frac{n}{k}\right)\sim n\ln n$$

où $E(x)$ est la partie entière de x, $(x\in\mathbb{R})$.

> On va tout d'abord essayer d'encadrer :
>
> $$\sum_{k=1}^{n}E\left(\frac{n}{k}\right)$$
>
> en remarquant que :
>
> $$\forall x\in\mathbb{R},\ E(x)\leqslant x<E(x)+1.$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ k\in\mathbb{N}^*,\ E\left(\dfrac{n}{k}\right)\leqslant\dfrac{n}{k}<E\left(\dfrac{n}{k}\right)+1$, ainsi :

$$\frac{n}{k}-1<E\left(\frac{n}{k}\right)\leqslant\frac{n}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}E\left(\frac{n}{k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}$$

donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-n<\sum_{k=1}^{n}E\left(\frac{n}{k}\right)\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

> On va, à présent, établir des résultats classiques de la suite :
>
> $$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
>
> par exemple, en étudiant les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
>
> $$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\quad\text{et}\quad b_n=a_n-\frac{1}{n}.$$

- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right).$

> Il est bien connu que $\forall x\in\left]-1,+\infty\right[\setminus\left\{0\right\},\ \ln(1+x)<x.$
>
> Cette inégalité résulte de la stricte concavité sur $\left]-1,+\infty\right[$ de la fonction $f\ :\ x\mapsto\ln(1+x)$, elle-même conséquence de :
>
> $$\forall x\in\left]-1,+\infty\right[,\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0.$$

En écrivant :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ell n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

on obtient, d'après le rappel précédent, $a_{n+1} - a_n < 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

- À présent, étudions la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n} - \ell n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

> C'est de nouveau une conséquence de $\forall x > -1, \ell n(1+x) \leqslant x$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

- La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est nulle.

Les suites $(a_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

> *Rappel.* Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Donc $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

> Cette limite commune est la constante d'Euler $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\, n = \gamma + o(1)$, donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, n$, et par suite :

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, \ell n\, n.$$

De cette équivalence et de l'encadrement précédent :

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - n < \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, \ell n\, n.$$

Ex. 17

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{11}{2}, \quad u_1 = \frac{61}{11} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n\, u_{n+1}}.$$

> Le problème semble assez hermétique. Une exploration numérique va peut-être nous permettre d'y voir plus clair. Par exemple, avec Maple, on peut utiliser la procédure suivante :

```
suite:=proc(n::integer)
    if n=0 then 11/2
    elif n=1 then 61/11
    else 111-1130/suite(n-1)+3000/suite(n-1)/suite(n-2)
    fi;
 end;
```

Le calcul des premiers termes donne :

$$u_0 = \frac{11}{2}, \quad u_1 = \frac{61}{11}, \quad u_2 = \frac{341}{61}, \quad u_3 = \frac{1\,921}{341}, \quad u_4 = \frac{10\,901}{1\,921}, \quad u_5 = \frac{62\,281}{10\,901}, \quad u_6 = \frac{358\,061}{62\,281},$$

ce qui semble mettre en évidence l'existence de deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \frac{a_n}{b_n} \text{ et } b_{n+1} = a_n.$$

- Supposons que ces suites existent. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n u_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_n} \quad \text{donc} \quad u_{n+2} = 111 - 1\,130\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + 3\,000\frac{b_n}{a_{n+1}}$$

et, compte tenu de $b_n = a_{n-1}$, il en résulte :

$$u_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{111a_{n+1} - 1\,130a_n + 3\,000a_{n-1}}{a_{n+1}}$$

c'est-à-dire aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_{n+3} = 111a_{n+2} - 1\,130a_{n+1} + 3\,000a_n \qquad (\mathcal{R})$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que la suite récurrente définie par $(\mathcal{R})$ et $a_0 = 11$, $a_1 = 61$, $a_2 = 341$.

- Considérons maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\, b_n = a_{n-1}.$$

Il est clair que ce sont des suites d'entiers relatifs et si ces entiers sont tous non nuls, en posant $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, le même calcul que ci-dessus montre que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie :

$$u_0 = \frac{11}{2}, \quad u_1 = \frac{61}{11} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 111 - \frac{1\,130}{u_{n+1}} + \frac{3\,000}{u_{n+1}}.$$

L'équation caractéristique de la récurrence $(\mathcal{R})$ s'écrit :

$$x^3 - 111x^2 + 1\,130x - 3\,000 = 0. \qquad (E)$$

S'agissant d'une équation du troisième degré, on commence par chercher des solutions particulières.

En remarquant que si un entier x est solution de (E), alors x est un diviseur de $3\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$, quelques essais donnent rapidement les trois solutions : 5, 6 et 100.

On sait que, dans ces conditions, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = \lambda 5^n + \mu 6^n + \nu 100^n$$

Le triplet (λ, μ, ν) est donné par le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 11 \\ 5\lambda + 6\mu + 100\nu = 61 \\ 25\lambda + 36\mu + 10\,000\nu = 341 \end{cases}$$

ce qui fournit $\lambda = 5$, $\mu = 6$, $\nu = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = 5^{n+1} + 6^{n+1}$.

Avec cette expression, il est clair que les a_n sont des entiers naturels non nuls et on a ainsi achevé la preuve de l'existence de deux suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

On remarquera que cette étude règle au passage le problème de l'existence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ puisque la récurrence donnée pour la définition de u_{n+2} n'a de sens que si u_n et u_{n+1} sont non nuls.

En conclusion, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

Ex. 18

Soit la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n \exp\left(-u_n\right) \end{cases}$$

1) Étudier cette suite selon $u_0 \in \mathbb{R}$.

2) On suppose $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de u_n.

1) On remarque que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\exp(-x)$.

Étude rapide de $f : x \mapsto xe^{-x}$.

a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x}(-x+1)$.

b) Points fixes de f et signe de $f(x) - x$: $f(x) - x = x\left(e^x - 1\right)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0
Signe de $\left(f(x) - x\right)$		$-$	0	$-$	$\frac{1}{e}-1$	$-$	
		$f(x) \leqslant x$				$f(x) \leqslant x$	

c) Intervalles de $\mathbb{R}$ stables par f :

$$\left]-\infty, 0\right[\ ,\ \left]0, 1\right]\ ,\ f\left(\left[1, +\infty\right[\right) \subset \left]0, 1\right].$$

f admet un unique point fixe : $x_0 = 0$.

On peut maintenant étudier la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite ne peut être que 0.

Si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par continuité de f en ℓ, on a $f(\ell) = \ell$.

- Soit $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}_-^*.$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) \leqslant x$ donc $f\left(u_n\right) \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Ainsi la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Si elle convergeait, on aurait :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n \leqslant u_0 \in \mathbb{R}_-^*,$$

ce qui est en contradiction avec la remarque précédente : si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 0.

Donc si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- $u_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, 1\right].$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, elle converge et on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Déterminons α pour que cette suite ait une limite finie non nulle (donc $\alpha \neq 0$) :

$$v_n = u_n^{\alpha} e^{-\alpha u_n} - u_n^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left(e^{-\alpha u_n} - 1\right)$$

Or $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = 0$. On en déduit :

$$e^{-\alpha u_n} = 1 - \alpha u_n + o(u_n), \quad \text{puis} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha\, u_n^{1+\alpha}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est non nulle si et seulement si $\alpha = -1$, et alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

On remarque alors que la série de terme général :

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

est divergente, à termes positifs, avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Dans cette situation, le théorème de sommation des équivalences nous donne l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1.$$

Or $\sum v_n$ est une série télescopique et on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}.$$

> Un objectif de la détermination de α était de faire apparaître une série télescopique dont la suite des sommes partielles soit $(u_n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ à une constante près.

Il vient donc :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donne $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n}$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \text{donc} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Ex. 19

Étudier la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{2 - u_n}$.

> Il s'agit là d'une suite récurrente homographique : la méthode est classique.

La fonction homographique $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1+x}{2-x}$ définit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la bijection réciproque est :

$$f^{-1}\ :\ y \mapsto \frac{2y-1}{y+1}.$$

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie si et seulement si $u_0 \notin \{v_n\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ où $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite telle que :

$$v_0 = 2,\ \ v_{n+1} = f^{-1}(v_n).$$

Déterminons les points fixes de f.

$$f(x) = x \iff x^2 - x + 1 = 0 \iff x \in \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

Notons que ces points fixes sont aussi $-j$ et $-j^2$ et que ce sont aussi les points fixes de f^{-1} puisque $f(x) = x$ équivaut à $x = f^{-1}(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, formons :

$$\frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = \frac{x+1+2j-jx}{x+1+2j^2-j^2x} = \frac{(1-j)x+j-j^2}{(1-j^2)x+j^2-j}$$

$$\frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = \frac{1-j}{1-j^2}\cdot\frac{x+j}{x+j^2} = \frac{1}{1+j}\,\frac{x+j}{x+j^2}$$

$$\text{donc}\quad \frac{f(x)+j}{f(x)+j^2} = -j\frac{x+j}{x+j^2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\,\frac{x+j}{x+j^2}.$$

En posant $y = f(x)$ on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

$$\frac{y+j}{y+j^2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}\,\frac{f^{-1}(y)+j}{f^{-1}(y)+j^2}\quad \text{c'est-à-dire}\quad \frac{f^{-1}(y)+j}{f^{-1}(y)+j^2} = e^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{y+j}{y+j^2}.$$

Il résulte de ce calcul que, si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+6}+j}{u_{n+6}+j^2} = \frac{u_n+j}{u_n+j^2}$$

donc $u_{n+6} = u_n$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est périodique de période 6, et il en est de même pour $(v_n)_{\mathbb{N}}$.

Pour conclure, il nous reste à déterminer $\{v_n\ /\ n \in \mathbb{N}\}$: avec $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 1}{v_n + 1}$ on obtient $v_0 = 2$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1/2$, $v_3 = 0$, $v_4 = -1$ et v_n n'est pas défini à partir de $n = 5$.

Finalement, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie pour $u_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1/2, 1, 2\}$ et alors elle est 6-périodique.

À titre de vérification, le calcul donne :

$$u_1 = \frac{1+u_0}{2-u_0}\ ,\ u_2 = \frac{1}{1-u_0}\ ,\ u_3 = \frac{2-u_0}{1-2u_0}\ ,$$

$$u_4 = \frac{-1+u_0}{u_0}\ ,\ u_5 = \frac{-1+2u_0}{1+u_0}\ ,\ u_6 = u_0\,.$$

Ex. 20

Discuter, selon $u_0 \in \mathbb{R}$, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

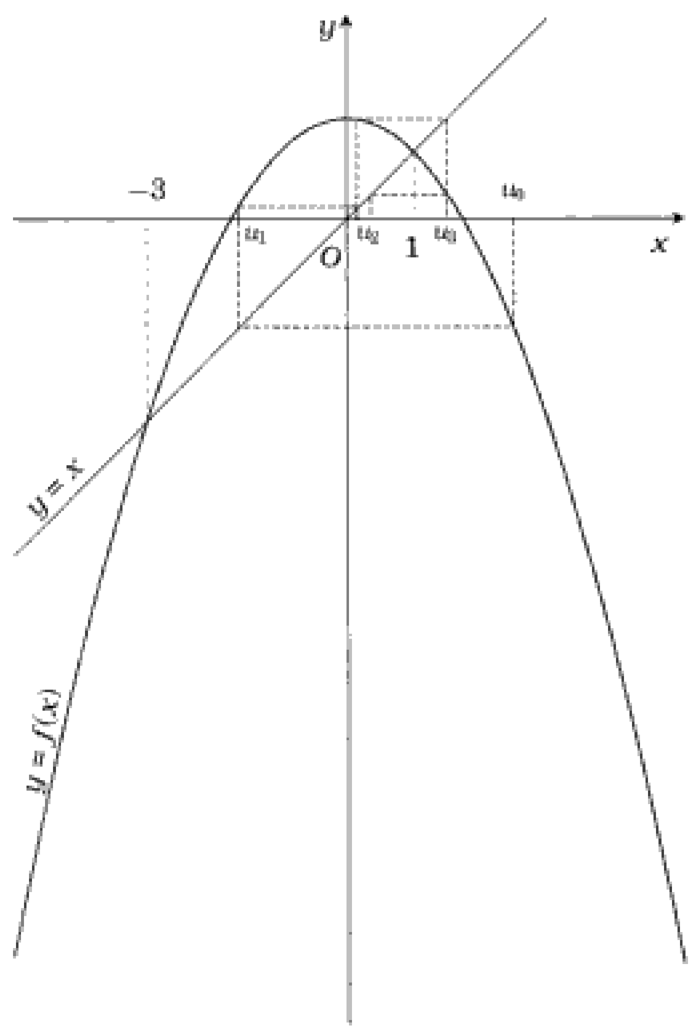
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3 - u_n^2\right)\quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Commençons par une étude rapide de la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(3 - x^2\right)$.

a) La courbe représentative de f est une parabole.

– Tableau de variation et courbe représentative :

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-3	0	$\frac{3}{2}$	↘ 1	0	-3	$-\infty$



b) Points fixes de f et position relative de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) - x = \frac{1}{2}\left(3 - x^2 - 2x\right) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$$

$$f(x) = x \iff x \in \left\{-3, 1\right\}$$

et on a :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $f(x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$f(x) \leqslant x$	$f(x) = x$	$f(x) \geqslant x$	$f(x) = x$	$f(x) \leqslant x$	

c) Intervalles de $\mathbb{R}$ stables par f, intervalles remarquables

$$f\left(\left[0,\sqrt{3}\right]\right)=\left[0,\frac{3}{2}\right]\subset\left[0,\sqrt{3}\right]$$

$$f\left(\left[-\sqrt{3},0\right]\right)=\left[0,\frac{3}{2}\right]\subset\left[0,\sqrt{3}\right]$$

$$f\left(\left]-\infty,-3\right]\right)=\left]-\infty,-3\right]$$

$$f\left(\left[3,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-3\right]$$

$$f\left(\left[-3,-\sqrt{3}\right]\right)=\left[-3,0\right]$$

$$f\left(\left[\sqrt{3},3\right]\right)=\left[-3,0\right]$$

d) La fonction f étant décroissante sur l'intervalle stable $\left[0,\sqrt{3}\right]$, on étudie les points fixes de $f\circ f$ dans l'intervalle $\left[0,\sqrt{3}\right]$, et les intervalles de $\left[0,\sqrt{3}\right]$ stables par $f\circ f$.

- $\forall x\in\mathbb{R}, f\circ f(x)=\dfrac{1}{2}\left(3-\left(f(x)\right)^2\right)=-\dfrac{1}{8}\left(x^4-6x^2-3\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}, f\circ f(x)-x=-\dfrac{1}{8}(x+3)(x-1)^3$

$\forall x\in\left[0,\sqrt{3}\right], f\circ f(x)=x \iff x=1$

$\forall x\in\left[0,1\right], f\circ f(x)\geqslant x$

$\forall x\in\left[1,\sqrt{3}\right], f\circ f(x)\leqslant x$

- $f\circ f$ est croissante sur $\left[0,\sqrt{3}\right]$
- $f\circ f\left(\left[0,1\right]\right)=\left[\dfrac{3}{8},1\right]\subset\left[0,1\right]$

$f\circ f\left(\left[1,\sqrt{3}\right]\right)=\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\subset\left[1,\sqrt{3}\right]$

2) Étudions à présent la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de $u_0\in\mathbb{R}$, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

D'abord, f étant continue sur $\mathbb{R}$, si la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est un point fixe de f, donc ne peut être que -3 ou 1.

Étudions ensuite les différents cas.

- 1^er^ cas : $u_0\in\left[0,\sqrt{3}\right]$

- Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in\left[0,\sqrt{3}\right]$.
- Si $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 1.
- Les suites extraites $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)$ sont strictement monotones et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=f\circ f\left(u_n\right).$$

Si $u_0\in\left[0,1\right[$, alors :

a) $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n}\in\left[0,1\right]$, intervalle stable par $f\circ f$ et $u_{2(n+1)}=f\circ f\left(u_{2n}\right)\geqslant u_{2n}$, donc $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, elle converge ; soit ℓ sa limite, $f\circ f$ étant continue sur $\left[0,\sqrt{3}\right]$, ℓ est un point fixe de $f\circ f$ dans l'intervalle $\left[0,1\right]\subset\left[0,\sqrt{3}\right]$ donc $\ell=1$;

b) et $u_1=f\left(u_0\right)\in\left[1,\sqrt{3}\right]$, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n+1}\in\left[1,\sqrt{3}\right]$, intervalle stable par $f\circ f$ et $u_{2n+3}=f\circ f\left(u_{2n+1}\right)\leqslant u_{2n+1}$, donc $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 1, elle converge ;

soit ℓ' sa limite, $f \circ f$ étant continue sur $[0, \sqrt{3}]$, sa limite ℓ' est un point fixe de $f \circ f$ de l'intervalle $[1, \sqrt{3}]$ donc $\ell' = 1$;

c) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a ses suites extraites d'ordres pair et impair qui convergent avec $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 1$, donc elle converge et $\lim u_n = 1$.

• Si $u_0 \in \left]1, \sqrt{3}\right]$, en échangeant le rôle des indices pairs et impairs, on obtient le même résultat.

• Si $u_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, suite constante.

En résumé, si $u_0 \in [0, \sqrt{3}]$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

▪ 2^{e} cas : $u_0 \in [-\sqrt{3}, 0]$

Alors $u_1 \in f([-\sqrt{3}, 0]) = \left[0, \frac{3}{2}\right] \subset [0, \sqrt{3}]$, et on est ramené au cas précédent.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, sa limite est 1.

▪ 3^{e} cas : $u_0 \in \left]-\infty, -3\right[$

Alors $u_n \in \left]-\infty, -3\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a $f(u_n) < u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, si elle est minorée alors elle converge et sa limite ℓ vérifie : $\ell = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n < -3$.

Or la limite, en cas d'existence, appartient à $\{1, -3\}$, par suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et on a $\lim u_n = -\infty$.

▪ 4^{e} cas : $u_0 \in \left]3, +\infty\right[$

Alors $u_1 \in f(\left]3, +\infty\right[) = \left]-\infty, -3\right[$, on est ramené au cas précédent.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$.

▪ 5^{e} cas : $u_0 \in \{-3, 3\}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -3$, suite constante, bien sûr convergente, de limite -3.

▪ 6^{e} cas : $u_0 \in \left]-3, -\sqrt{3}\right]$

Comme pour tout $x \in \left]-3, 1\right[$, $f(x) > x$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[$, alors $f(u_n) = u_{n+1} > u_n$, et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, majorée par $-\sqrt{3}$, elle converge et sa limite ℓ appartient à $\left]u_0, -\sqrt{3}\right]$ ce qui est contradiction avec $\ell \in \{-3, 1\}$ et par suite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, u_{n_0} \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[\quad \text{et} \quad u_{n_0+1} = f(u_{n_0}) \notin \left]-3, -\sqrt{3}\right[.$$

Or, si $u_{n_0} \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[$, $f(u_{n_0}) \in f(\left]-3, -\sqrt{3}\right[) = \left]-3, 0\right[$, donc :

$$f(u_{n_0}) = u_{n_0+1} \in \left[-\sqrt{3}, 0\right[.$$

On est alors ramené à partir du rang $n_0 + 1$ au 2^{e} cas.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

▪ 7^{e} cas : $u_0 \in \left]\sqrt{3}, 3\right[$

Alors $u_1 \in \left]-3, 0\right[$, c'est le cas précédent à partir du rang 1.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

- Conclusion

Si $u_0 \in]-3,+3[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1, avec le cas particulier $u_0 = 1$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

Si $u_0 \in \{-3,+3\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et sa limite est -3.

Si $u_0 \in]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$.

(E) Séries

Ex. 21

$\sum a_n$ est une série convergente, à termes positifs. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{a_{2n}a_n}$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

On va tout d'abord étudier la série de terme général a_{2n}.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum a_{2n}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et on obtient :

$$A_n \leqslant S_{2n}.$$

Or la série $\sum a_n$ est convergente, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, comme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R}^*,\ \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\geqslant 0} S_n = S$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \leqslant S_{2n} \leqslant S.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série à *termes positifs* $\sum a_{2n}$ est majorée par S, donc elle converge et la série $\sum a_{2n}$ converge.

On obtient bien sûr :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On sait que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)$$

Revoir peut-être, d'une façon plus générale, les moyennes arithmétiques et géométriques.

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \sqrt{a_n a_{2n}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{2n}).$$

La série $\sum a_n$ est convergente par hypothèse.

On vient de montre que $\sum a_{2n}$ est convergente, on en déduit que $\sum \frac{1}{2}(a_n+a_{2n})$ est convergente.

> En effet, l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel.

D'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \sqrt{a_n a_{2n}}$ est convergente.

Ex. 22

1) $\sum u_n$ est une série à termes complexes convergente, étudier la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

2) Peut-on appliquer le même raisonnement à $\sum \frac{j^n}{n}$?

1)

> On peut remarquer que si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors :
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{u_n}{n}\right| \leqslant |u_n| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\frac{u_n}{n}\right| = \mathcal{O}(|u_n|).$$
> Or la série $\sum |u_n|$ est convergente donc, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n}$ est absolument convergente. Il reste à étudier le cas où $\sum u_n$ est une série semi-convergente.

Étudions, dans tous les cas, la suite $(S_n)_{\in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$

> La suite des sommes partielles de la série de terme général $\sum u_n$ est une suite convergente. Introduisons-la : soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = U_k - U_{k-1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k - U_{k-1}}{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k}.$$

En translatant l'indice dans la seconde somme, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{U_k}{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{U_n}{n} - U_0.$$

Considérons alors la série $\sum v_n$ où $v_n = U_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On reconnait en :

$$\sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série de terme général $\sum v_n$.

Étudions la nature de cette série $\sum v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leqslant |U_n| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Car la série $\sum u_n$ est convergente par hypothèse.

Étant convergente, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leqslant M$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leqslant M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Or la série $\sum M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est une série convergente.

En effet, montrons ce résultat de deux façons différentes :

(i) ou bien sa somme est M (car $\sum_{k=1}^{n} M \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = M\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$) ;

(ii) ou bien on peut remarquer que $0 < M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{M}{n^2}$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

D'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |v_n|$ est donc convergente, c'est-à-dire que $\sum v_n$ est absolument convergente, ce qui entraîne la convergence de $\sum v_n$. Ceci est équivalent, par définition, à la convergence de la suite des sommes partielles de $\sum v_n$.

Or $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\left(\sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|U_n|}{n} \leqslant \frac{M}{n}$ donc la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est nulle.

Ainsi, d'après les opérations algébriques élémentaires, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente donc la série de terme général $\frac{u_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

1) *Vocabulaire.* La transformation effectuée sur la somme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui a consisté à remplacer u_k par $U_k - U_{k-1}$, est appelée *transformation d'Abel.*

On dit avoir effectué la transformation d'Abel sur la somme $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k}$.

2) *Remarque.* Dans la démonstration précédente, seul est intervenu le fait que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et non sa convergence.

2) Peut-on appliquer le même raisonnement à $\sum \frac{j^n}{n}$?

Posons $u_n = j^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} j^k$; or $1 + j + j^2 = 0$.

Si $n \equiv 2(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 0$.

Si $n \equiv 1(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 1 + j$.

Si $n \equiv 0(3)$ alors $\sum_{k=0}^{n} j^k = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} j^n\right| \leqslant 2$.

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum j^n$ est bornée et, d'après le raisonnement de la question 1) et la remarque précédente, $\sum \frac{j^n}{n}$ est une série convergente.

> Bien sûr elle n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{|j^n|}{n} = \sum \frac{1}{n}$ et on sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Ex. 23

Soit $\sum u_n$ une série convergente, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n.

1) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la différence $\sum_{k=0}^{k=n} R_k - \sum_{k=1}^{k=n} ku_k$ en fonction de n et de R_n.

2) On suppose, de plus, $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que les séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, comparer leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} R_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{n=+\infty} nu_n\,.$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k\left(R_{k-1} - R_k\right) = \sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kR_k$.

> Dans la première somme, le changement de variable $q = k - 1$ donne :
>
> $$\sum_{k=1}^{n} kR_{k-1} = \sum_{q=0}^{n-1} (q+1)R_q\,.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k$$

$$= R_0 - nR_n + \sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)R_k - kR_k\big)$$

$$= R_0 - nR_n + \sum_{k=1}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n = \sum_{k=0}^{n} R_k - (n+1)R_n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} ku_k = (n+1)R_n\,.$$

2) Montrons que la convergence de $\sum R_n$ entraine la convergence de $\sum ku_k$.

D'après le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} ku_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Or $\sum R_n$ converge, soit R sa somme ; comme $R_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} R_k \leqslant R$$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k \leqslant R \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série *positive* $\sum ku_k$ est majorée, donc $\sum ku_k$ converge, et de plus on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

> Pour la réciproque, on va, dans un premier temps, démontrer que si $\sum nu_n$ converge, alors la suite $(n+1)R_n$ converge.

Si la série $\sum ku_k$ converge, alors la suite de ses restes d'ordre n existe :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et elle converge, sa limite est 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \geqslant n+1 \sum_{k=n+1}^{k=m} ku_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{k=m} (n+1)u_k = (n+1)\sum_{k=n+1}^{m} u_k\,.$$

Par hypothèse, $\sum u_n$ converge, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n\,.$$

De même :

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} k\,u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,u_k$$

donc, d'après les théorèmes sur les limites et relation d'ordre :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k \geqslant (n+1)R_n \geqslant 0.$$

En appliquant le théorème d'encadrement aux suites :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{convergente, de limite 0, et } \big((n+1)R_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

on obtient que la suite $\big((n+1)R_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.

> Maintenant, nous allons pouvoir conclure.

Or, d'après la question 1) :

$$\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=0}^{n} ku_k = (n+1)R_n$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} R_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire que $\sum R_n$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nu_n .$$

En conclusion, les deux séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et, lorsqu'elles convergent, elles ont même somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nu_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n .$$

Ex. 24

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \tag{1}$$

2) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ est convergente. Montrer qu'il en est de même pour la série de terme général $\frac{n}{u_n + \cdots + u_n}$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

3) Montrer que 2 est la plus petite constante K réelle positive vérifiant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{*\,\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ soit convergente.

On pourra, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, considérer la suite $(u_k)_{k\geqslant 1}$ définie par :

$$u_k = k \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad u_k = (n+1)2^{k-n} \text{ si } k \geqslant n+1.$$

1) On se doit de penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Avec $u = \left(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \ldots, \sqrt{u_n}\right) \in \mathbb{R}^n$ et $v = \left(\dfrac{k}{\sqrt{u_1}}, \dfrac{k}{\sqrt{u_2}}, \ldots, \dfrac{k}{\sqrt{u_n}}\right) \in \mathbb{R}^n$, en utilisant le produit scalaire euclidien canonique, on a :

$$\langle u \mid v \rangle = \sum_{k=1}^{n^2} k \quad , \quad \| u \|^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \| v \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\langle u \mid v \rangle^2 \leqslant \| u \|^2 \| v \|^2$ donne le résultat annoncé.

2) Essayons d'abord de faire le lien avec la question précédente.

Compte tenu de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, l'inégalité (1) donne :

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} \qquad (2)$$

À ce niveau, pour atteindre l'inégalité annoncée dans cette question 2), il parait nécessaire de majorer la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ en faisant apparaître la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{u_k}$ donc en permutant les sommes dans $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k}$.

Cependant cette permutation donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{4k^2}{u_k} \sum_{n=k+1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{u_k}\end{aligned}$$

et on n'obtient pas le résultat souhaité !

On peut alors avoir l'idée de reprendre la majoration (2) en remplaçant :

$$\frac{4}{n(n+1)^2} \text{ par } \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

En remarquant que $\dfrac{4}{n(n+1)^2} = \dfrac{4n}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{2(n+1)^2 - 2n^2 - 2}{n^2(n+1)^2} \leqslant \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{2}{(n+1)^2}$ on obtient :

$$\frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k} \leqslant 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{u_k} \qquad (3)$$

En permutant les sommations, il vient maintenant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{u_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{u_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{u_k}.$$

Avec la majoration (3), les facteurs k^2 se sont simplifiés après permutation des sommations.

Enfin, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ étant convergente, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}.$$

Il en résulte que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n}$ converge en tant que série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée et, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}.$$

3) En premier lieu, il y a lieu d'étudier la série $\sum \frac{1}{u_k}$.

À partir du rang $n+1$, $\sum \frac{1}{u_k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente, et sa somme est :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

La série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ étant divergente, la somme $S(n)$ de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{u_k}$ tend vers $+\infty$ lorsque le paramètre n tend lui-même vers $+\infty$.

Soit K une constante vérifiant les conditions annoncées. Avec la série ci-dessus on obtient :

$$K \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = K \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{u_1 + \cdots + u_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{u_1 + \cdots + u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)}$$

c'est-à-dire :

$$K\,S(n) \geqslant 2S(n) - 2$$

soit encore :

$$K \geqslant 2 - \frac{2}{S(n)}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit $K \geqslant 2 - 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S(n)}$ c'est-à-dire $K \geqslant 2$.

Compte tenu du 2), cette inégalité prouve que 2 est le plus petit réel positif K tel que, pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$ pour laquelle $\sum \frac{1}{u_n}$ converge, on ait :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{u_1 + \cdots + u_n} \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Ex. 25

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{b_n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est convergente.

1) Pas de mystère, il faut passer au logarithme.

La croissance de la fonction $\ln$ donne $\forall k \geqslant 2$, $\ln k \geqslant \int_{k-1}^{k} \ln x \,\mathrm{d}x$, donc :

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \geqslant \frac{1}{n}\int_{1}^{n} \ln x \,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire $\ln \sqrt[n]{n!} \geqslant \dfrac{1}{n}(n \ln n - n + 1)$ soit aussi $\ln \sqrt[n]{n!} \geqslant \ln n + \dfrac{1}{n} - 1$.

Sachant que $\dfrac{1}{n} \geqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, il vient $\ln \sqrt[n]{n!} \geqslant \ln(n+1) - 1$ et finalement :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{e}{n+1}. \qquad \textbf{(1)}$$

2) b_n est la moyenne harmonique des n nombres $a_1, \dots, a_n$. C'est le moment de se souvenir que l'on sait comparer les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de n réels strictement positifs.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont n réels strictement positifs, de par la concavité de la fonction $\ln$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

d'où :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n). \qquad \textbf{(2)}$$

En conséquence, on a $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\cdots\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dots + \dfrac{1}{a_n}\right)$, c'est-à-dire :

$$b_n \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}. \qquad \textbf{(3)}$$

Pour conclure à la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$; il suffit donc de montrer la convergence de la série de terme général $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

Posons $c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. On a aussi $c_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} k a_k\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

La majoration «naturelle» de la moyenne géométrique $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$ par la moyenne arithmétique (formule **(2)**) s'avérant insuffisante, nous nous sommes laissés guider par l'énoncé en effectuant sur l'expression de c_n une manipulation permettant d'exploiter l'inégalité **(1)**.

D'après **(2)**, on a $\left(\prod_{k=1}^{n} k\, a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k$ d'où, compte tenu de **(1)**, $c_n \leqslant \frac{e}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ka_k$.

> L'apparition de la série télescopique de terme général $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ va nous permettre, au prix d'une permutation des sommations, de majorer les sommes partielles d'ordre n de la séries de terme général c_n en fonction de celles de la série de terme général a_n.

Avec la dernière inégalité, on obtient :

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} c_n \leqslant e\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} \frac{ka_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{p} ka_k \sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n(n+1)},$$

or :

$$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{p+1} < \frac{1}{k},$$

donc :

$$S_p \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

La suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ étant majorée, la série de terme général c_n converge, et il en est de même de la série de terme général b_n avec de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Ex. 26

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, convergente de limite nulle, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge, où :

$$v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q\,.$$

2) Étudier la nature des séries $\sum u_n$ où :

a) $\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } n \in [\![0, 2p-1]\!] \\ u_n = \dfrac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} & \text{pour tout } n \geqslant 2p\,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } n \in [\![0, 2p-1]\!] \\ u_n = \dfrac{(-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}} & \text{pour tout } n \geqslant 2p. \end{cases}$

1) Étudions d'abord la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En remarquant que :

$$\forall q \in [\![pn, pn+p-1]\!],\ n \leqslant \frac{q}{p} \leqslant n + \frac{p-1}{p} = n + 1 - \frac{1}{q},$$

on obtient que :

$$\forall q \in [\![pn, pn+p-1]\!],\ E\left(\frac{q}{p}\right) = n.$$

Ainsi :

$$v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} (-1)^{E\left(\frac{q}{p}\right)} a_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} a_q,$$

or $\forall q \in \mathbb{N},\ a_q \in \mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\sum_{q=pn}^{pn+p-1} a_q > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et $\sum v_n$ est une série alternée.

On peut remarquer que, si $p = 1$, alors $v_n = u_n$ et $\sum u_n$ est une série alternée.

Comparons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suites des sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \sum_{q=0}^{n} v_q = \sum_{q=0}^{q=n} \sum_{k=pq}^{k=pq+p-1} u_k = \sum_{k=0}^{k=pn+p-1} u_k = U_{pn+p-1}.$$

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(U_n)_n$ converge et toute suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(U_{pn+p-1})_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge aussi, donc la série $\sum v_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{pn+p-1} = \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Réciproquement, si $\sum v_n$ converge alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la suite $(U_{pn+p-1})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q = E\left(\dfrac{n-p+1}{p}\right)$ alors :

$$pq + p - 1 \leqslant n < p(q+1) + p - 1$$

et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{pq+p-1} u_k + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

donc :

$$U_n = U_{pq+p-1} + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k = V_q + \sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

La somme :

$$\sum_{k=pq+p}^{n} u_k$$

contient au plus p termes chacun d'eux ayant, par hypothèse, une limite nulle, elle admet donc aussi 0 pour limite.

En remarquant que lorsque n tend vers l'infini, q tend aussi vers l'infini, on en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

On a ainsi montré que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge, et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

2) a) Posons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}}$ pour tout $n \geqslant 2p$.

$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \in [\![0, 2p-1]\!]$$

$\forall n \geqslant 2p$, $a_n > 0$, et $u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

La nature d'une suite, ou d'une série, n'étant pas modifiée lorsque l'on modifie un nombre fini de termes, les hypothèses de l'exercice sont donc vérifiées et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{E\left(\frac{q}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{q}{p}\right)}}}$$

$$= (-1)^n \sum_{q=pn}^{pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n p}{\sqrt{n+(-1)^n}} .$$

La suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, en effet :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |v_{2k+1}| - |v_{2k}| = \frac{p}{\sqrt{2k}} - \frac{p}{\sqrt{2k+1}} \geqslant 0.$$

On ne peut donc pas appliquer le théorème des séries alternées (qui est une condition suffisante de convergence).

Effectuons alors un développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série convergente ;

la série $w_n = \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est une série à termes positifs et :

$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}} .$$

D'après le théorème des équivalents des séries à termes positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ étant convergente, la série $\sum w_n$ est également convergente. Donc :

$$\sum v_n = p \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

est convergente en tant que somme de deux séries convergentes et, par suite, $\sum u_n$ est convergente.

b) Posons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{E\left(\frac{n}{p}\right) + (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}}$ pour tout $n \geqslant 2p$.

$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \in [\![0, 2p-1]\!].$$

$\forall n \geqslant 2p$, $a_n > 0$, et $u_n = (-1)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} a_n$, (a_n) est convergente de limite nulle.

Comme pour l'exemple a), $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} u_q = (-1)^n \sum_{q=pn}^{q=pn+p-1} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{p(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

À nouveau, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas monotone, le théorème des séries alternées ne peut pas être appliqué, et un développement limité est maintenant :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Avec ici :

$$w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

la série $\sum w_n$ est un série divergente (car $w_n \sim 1/n$ et par application du théorème des équivalents des séries à termes positifs). Donc :

$$\sum v_n = p \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

est divergente en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente et, par suite $\sum u_n$ est divergente.

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Les théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. Pour tout $X \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^+$, on note $B_o(X, r)$ [resp. $B_f(X, r)$] la boule ouverte (resp. fermée) de centre X et de rayon r.

Pour toute partie A de E, on notera $\overline{A}$ l'adhérence de A et $\mathring{A}$ l'intérieur de A.

L'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, noté $\mathscr{L}_C(E, \mathbb{C})$, est muni de la norme subordonnée à la norme $\| \ \|$ de E, définie par :

$$\forall f \in \mathscr{L}_C(E, \mathbb{C}),\ |||f||| = \sup\left\{ |f(X)|, X \in B_f(0,1)\right\} = \inf\left\{A \geqslant 0 ; \forall X \in E, |f(X)| \leqslant A\| X \|\right\}.$$

On suppose que E est complet, il s'agit donc d'un espace de Banach.

1) *Le théorème de Baire*

On considère $(O_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts de E tels que $\overline{O_n} = E$ (O_n est dense dans E). On pose :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n .$$

a) Montrer que, pour tout ouvert non vide O de E, on peut construire une suite $(X_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E et une suite réelle $(r_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

i. $B_f(X_1, r_1) \subset O_1 \cap O$;

ii. si $p \geqslant 2$, $B_f(X_p, r_p) \subset O_p \cap B_o(X_{p-1}, r_{p-1})$;

iii. si $p \in \mathbb{N}^*$, $0 < r_p < \dfrac{1}{p}$.

b) Montrer que la suite $(X_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ ainsi construite est une suite de Cauchy. En déduire que A est dense dans E.

2) *Le théorème de Banach-Steinhaus (cas particulier)*

Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de formes linéaires continues sur E telles que, pour tout $X \in E$, la suite $(U_p(X))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans $\mathbb{C}$. On note $U(X) = \lim_{p \to +\infty} U_p(X)$.

On pose $M(X) = \sup_{p \in \mathbb{N}^*} |U_p(X)|$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \left\{X \in E \,/\, M(X) > n\right\}$.

a) Montrer que U est une forme linéaire sur E.

b) Montrer que V_n est ouvert et que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \varnothing$.

c) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $X_0 \in E$, $r > 0$ tels que $B_f(X_0, r) \cap V_N = \varnothing$. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\|U_p\| \leqslant M$ et que U est continue.

Solution

1) a) O_1 et O sont ouverts donc $O_1 \cap O$ est ouvert. D'autre part, on a $\overline{O_1} = E$ donc tout point X de O est adhérent à $\overline{O_1}$:

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_o(X, r) \cap O_1 \neq \emptyset\,;$$

or, puisque O est ouvert et $X \in O$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_o(X, r) \subset O$$

et on a $O \cap O_1 \supset \mathcal{B}_o(X, r) \cap O_1$ d'où finalement $O \cap O_1 \neq \emptyset$.

Ainsi $O_1 \cap O$ est un ouvert non vide et pour tout X_1 de $O_1 \cap O$, il existe $r_1 > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_f(X_1, r_1) \subset O_1 \cap O.$$

Supposons construits $X_1, \dots, X_{p-1}$ points de E et $r_1, \dots, r_{p-1}$ réels > 0 tels que :

$$\forall k \in [\![2, p-1]\!], \mathcal{B}_f(X_k, r_k) \subset O_k \cap \mathcal{B}_o(X_{k-1}, r_{k-1}) \text{ et } 0 < r_k < \frac{1}{k}.$$

Alors comme ci-dessus, O_p est dense dans E, donc X_{p-1} est adhérent à O_p et :

$$O_p \cap \mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1})$$

est non vide. Or O_p et $\mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1})$ sont des ouverts, donc $O_p \cap \mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1})$ est un ouvert non vide de E. Ainsi, pour tout point $X_p \in O_p \cap \mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1})$, il existe $r'_p > 0$ tel que :

$$\mathcal{B}_f(X_p, r'_p) \subset O_p \cap \mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1}).$$

Il suffit alors de poser $r_p = \min\left(r'_p, \dfrac{1}{p+1}\right)$ pour obtenir $0 < r_p < \dfrac{1}{p}$ et :

$$\mathcal{B}_f(X_p, r_p) \subset \mathcal{B}_f(X_p, r'_p) \subset O_p \cap \mathcal{B}_o(X_{p-1}, r_{p-1}).$$

L'existence des suites $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(r_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est ainsi prouvée par récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathcal{B}_f(X_{n+p}, r_{n+p}) \subset \mathcal{B}_f(X_n, r_n),$$

donc :

$$\|X_{n+p} - X_n\| \leqslant r_n \quad \text{puis} \quad \sup_{p\in\mathbb{N}} \|X_{n+p} - X_n\| \leqslant r_n.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, on en déduit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et, puisque E est complet, elle converge vers $X \in E$.

Pou tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, X_{n+p} \in \mathcal{B}_f(X_n, r_n)$$

donc :

$$X = \lim_{p\to+\infty} X_{n+p} \in \mathcal{B}_f(X_n, r_n),$$

car $\mathcal{B}_f(X_n, r_n)$ est un fermé de E. Ceci étant vrai quel que soit n, on a :

$$X \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_f(X_n, r_n) \quad \text{et donc} \quad X \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_f(x_n, r_n) \subset O_n$.

Enfin comme, par construction, on a $\mathcal{B}_f(X_n, r_n) \subset O$, on obtient aussi :

$$X \in O \text{ et donc } X \in O \cap A \text{ (avec } A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n).$$

On vient de démontrer que, pour tout ouvert O de E, on a $A \cap O \neq \emptyset$. En conséquence, pour tout $X \in E$ et tout $r > 0$, on a $A \cap \mathcal{B}_o(X, r) \neq \emptyset$ donc $X \in \overline{A}$: A est dense dans E.

> On a démontré le théorème de Baire : dans un espace vectoriel normé complet, pour toute suite d'ouverts denses, l'intersection de ces ouverts est également dense.

2) a) Évidence : il suffit de passer à la limite dans $U_p(\lambda X + Y) = \lambda U_p(X) + U_p(Y)$.

b) Pour $X \in V_n$ on a $\sup\limits_{p \in \mathbb{N}^*} |U_p(X)| > n$, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|U_{p_0}(X)| > n$.

Par continuité de $|U_{p_0}|$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\| Y - X \| < r \Rightarrow |U_{p_0}(Y)| > n \Rightarrow \sup_{p \in \mathbb{N}} |U_p(Y)| > n \quad \text{c'est-à-dire} \quad M(Y) > n.$$

Ainsi, pour tout $X \in V_n$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(X, r) \subset V_n$ ce qui montre que V_n est ouvert.

Pour tout $X \in E$, $M(X)$ est un réel et si $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ était non vide, pour $X \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n < M(X)$$

$\mathbb{N}^*$ serait majoré. C'est absurde donc $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ est vide.

c) Si tous les V_n étaient denses dans E, d'après le théorème de Baire, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ serait dense dans E donc, puisque ce n'est pas le cas, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que V_N n'est pas dense et $\overline{V}_N \neq E$ donne l'existence de :

$$X_0 \in E \text{ et } r > 0 \quad \text{tel que} \quad V_N \cap \mathcal{B}_f(X_0, r) \neq \emptyset.$$

Pour tout $X \in \mathcal{B}_f(X_0, r)$, on a alors $X \notin V_N$ donc :

$$M(X) \leqslant N \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, |U_p(X)| \leqslant N.$$

Soit maintenant $X \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)$.

On a $Y = X_0 + rX \in \mathcal{B}_f(X_0, r)$ donc, avec $X = \frac{1}{r}(X_0 + rX - X_0)$, il vient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, |U_p(X)| \leqslant \frac{1}{r}\left(\left|U_p(X_0 + rX)\right| + \left|U_p(X_0)\right|\right) \leqslant \frac{N + M(X_0)}{r}.$$

Posons $M = \frac{1}{r}(N + M(X_0)) > 0$, avec $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathcal{B}_f(0_E, 1), |U_p(X)| \leqslant M$, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \|U_p\| = \sup_{\|X\| \leqslant 1} |U_p(X)| \leqslant M.$$

De même, avec :

$$\forall X \in \mathcal{B}_f(0_E, 1), \forall p \in \mathbb{N}^*, |U_p(X)| \leqslant M,$$

en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient :

$$\forall X \in \mathcal{B}_f(0_E, 1), |U(x)| \leqslant M$$

donc la forme linéaire U est continue (et $|||U||| \leqslant M$).

> On vient de démontrer un cas particulier du théorème de Banach-Steinhaus.

2 Étude de suites
Recherche d'équivalents

E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit $f\ :\ E \to E$ telle que, si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E :

$$f(a) = \alpha \text{ avec } \alpha = \left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a_n + 2a_{n+1}.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

2) a) Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites de E :

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } a_0 = 0.$$

Montrer que la restriction de f à F est une bijection de F sur E.

b) Soit $a \in F$ et $\alpha = f(a)$. Montrer que si α converge vers 0, il en est de même de a.

3) Soit $\alpha \in E$. Déterminer les suites $b \in E$ telles que $f(b) = \alpha$. Montrer que si α converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, b est une suite convergente, et préciser sa limite.

4) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}.$$

a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{3} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 1.$$

c) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{et} \quad v_0 = u_0.$$

Soit $\alpha = f(v)$. Montrer que la suite α est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $u_{n+1} \sim u_n$.

Déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ et en déduire $u_n \sim \dfrac{2n}{3}$.

e) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha_n - 2$. Donner un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$.

f) Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = u_n - \frac{2}{3}n \quad \text{et} \quad \beta = f(b) = \left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Donner un équivalent de β_n (quand n tend vers $+\infty$).

g) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_{n+1} - b_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Déterminer un équivalent de b_n (quand n tend vers $+\infty$) et en déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes quand $n \to +\infty$.

Solution

1) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles donc aussi des applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

> Montrer que $f\ :\ E \to E$ est linéaire consiste, bien sûr, à vérifier que :
> $$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(a, b) \in E^2, f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$
> où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda a + \mu b = (\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in E \,/\, f(a) = 0\} = \{a \in E \,/\ \forall n \in \mathbb{N}, a_n + 2a_{n+1} = 0\}$$
$$\operatorname{Ker} f = \left\{a \Big/ a = \left(a_0\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace vectoriel de E des suites géométriques de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2) a) Soit $f_{|F} = g$, alors $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

- Injectivité

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap F = \left\{a \in E \Big/ a = a_0\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ et }\ a_0 = 0\right\}$, donc $\operatorname{Ker} g = \{0\}$ donc $g = f_{|F}$ est une application linéaire injective de F vers E.

- Surjectivité

Soit $\alpha \in E$; la suite $a \in E$ telle que :
$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\alpha_n - a_n}{2}$$
est un élément de F et vérifie $f_{|F}(a) = \alpha$, donc $f_{|F}$ est une application surjective.

On en déduit que $f_{|F}$ est un isomorphisme de F sur E.

> Bien sûr, il n'est pas question ici d'appliquer le théorème valable lorsque E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $\dim E = \dim F$: il est alors équivalent de dire, pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, u est injective, u est surjective, u est bijective.
>
> On peut remarquer que $f_{|F}$ est une bijection de F sur E avec $F \subsetneq E$.

b) On montre alors que, pour tout $\alpha \in E$, la suite $a \in F$ vérifiant $f(a) = \alpha$ est telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}2^k\alpha_k$$
donc :
$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}2^k\,|\alpha_k|\ .$$

Par hypothèse, la suite α converge et sa limite est nulle, donc $2^n\,|\alpha_n| = o(2^n)$.

$\sum 2^n\,|\alpha_n|$ et $\sum 2^n$ sont deux à deux séries à termes positifs et la série $\sum 2^n$ est divergente.

En appliquant un théorème de sommation des prépondérances pour les séries à termes positifs, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right).$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$ et que $2^n - 1 \sim 2^n$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k |\alpha_k| = o(2^n),$$

ce qui donne que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle. Enfin, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est nulle.

3) D'après la question 2)a), $f_{|F}$ étant une application bijective de F dans E, il existe une unique suite $a \in F$ telle que que $f(a) = \alpha$. Par linéarité de f, on en déduit que :

$$\mathcal{S} = \left\{b \in E \,/\, f(b) = \alpha\right\} = \left\{a + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\}.$$

> Par le raisonnement très classique :
> $$f(b) = \alpha \iff f(b) = f(a) \iff f(b-a) = 0$$
> (car f est linéaire) ; or $f(b-a) = 0 \iff b - a \in \operatorname{Ker} f$.

Si α converge vers ℓ, alors la suite $\alpha' = (\alpha_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

La suite constante $\left(\dfrac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour image par f la suite $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par linéarité de f et d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\left\{b' \in E \,/\, f(b') = \alpha'\right\} &= \left\{a - \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}} + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\}\\ &= \left\{a' + u \,/\, u \in \operatorname{Ker} f\right\} = \left\{b - \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, b \in \mathcal{S}\right\}\end{aligned}$$

où a' est l'unique suite de F telle que $f(a') = \alpha'$, qui est convergente de limite 0, d'après 2)b).

> Le but est de «reconstituer» les hypothèses de la question 2)b) et d'appliquer ensuite les résultats sur les opérations algébriques élémentaires des suites convergentes.

On en déduit que :

$$\forall b \in \mathcal{S}, \exists u \in \operatorname{Ker} f \,/\, b = a' + u + \left(\frac{\ell}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

u est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ donc convergente, de limite nulle. Donc la suite b converge et sa limite est $\dfrac{\ell}{3}$.

4) a) $u_0 = u_1 = \dfrac{3}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}.$$

On peut d'abord montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (par récurrence), donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(i) Ensuite, comme $u_2 = \frac{5}{2}$, on remarque que :

$$u_0 < u_1 < u_2 .$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \,/\, u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2}$.

$u_n u_{n-1} \geqslant u_{n-1}^2 \geqslant u_{n-1}u_{n-2}$ car $u_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 + \sqrt{u_n u_{n-1}} \geqslant 1 + u_{n-1} \geqslant 1 + \sqrt{u_{n-1}u_{n-2}} = u_n$$

On obtient alors $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1}$, la propriété est donc héréditaire et :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

(iii) On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors soit elle converge, soit elle diverge en tendant vers $+\infty$.

Si elle converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 + \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

> D'après la continuité de $f \;:\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 + \sqrt{x \cdot y}$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$.

b) $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ d'après la question précédente. On en déduit que :

$$u_{n+2} \geqslant 1 + u_n \geqslant u_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

> Il suffit de reprendre les calculs de l'hérédité de la récurrence de la question précédente.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geqslant u_{n+1} - u_n$, et comme la suite est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geqslant u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

> On veut «améliorer» cette inégalité en montrant que $\frac{1}{3} \leqslant u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n u_{n-1}} - u_n \geqslant 1 + \sqrt{(u_n - 1)u_n} - u_n = \varphi(u_n)$$

où $\varphi \;:\; x \mapsto \sqrt{(x-1)x} - x + 1$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ avec, pour tout $x \in \,]1, +\infty[$:

$$\varphi'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x(x-1)}} - 1 > 0.$$

> Car $(2x-1)^2 - 4x(x-1) = 1$, donc :
> $$\forall x \in \,]1, +\infty[, 2x - 1 > 2\sqrt{x(x-1)}$$
> puis :
> $$\forall x \in \,]1, +\infty[, \frac{(2x-1)}{2\sqrt{x(x-1)}} - 1 > 0.$$

Donc φ est croissante sur $[1, +\infty[$; ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \geqslant \varphi(u_n) \geqslant \varphi(u_1) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

D'où le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{1}{3}$.

c) $\alpha = f(v)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = v_n + 2v_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n-1}$$
$$= 2\left(1 + \sqrt{u_n u_{n-1}}\right) - u_n - u_{n-1} = 2 - \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3} \leqslant \left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right) \leqslant 1$$
$$\text{et} \quad \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \in \mathbb{R}_+^* \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

donc :

$$\frac{1}{3\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)} \leqslant \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}}$$

De plus $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}} = 0.$$

Donc, d'après les théorèmes d'encadrement la suite $\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge avec :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right) = 0$$

et il en résulte que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge avec $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 2$.

Enfin, d'après 3), $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{2}{3}$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3} \leqslant u_{n-1} - u_n \leqslant 1$, or $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{3u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leqslant \frac{1}{u_n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

Par application du théorème d'encadrement, on obtient $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.

> ▪ Une erreur classique est de penser, qu'étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a toujours $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$; il n'en est, bien sûr, rien.
>
> Par exemple, soit la suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ et donc, à l'exception de la suite constante égale à 1, on n'a jamais u_n et u_{n+1} équivalents !
>
> ▪ On peut de plus remarquer ici que $u_{n+1} - u_n$ est compris entre $1/3$ et 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors que $u_{n+1} \sim u_n$, donc, si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ce n'est pas vers 0.

$\sum \alpha_k$ et $\sum 2$ sont deux séries divergentes à termes positifs et vérifiant :

$$\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2.$$

D'après un théorème de sommation des équivalences pour les séries à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sim \sum_{k=0}^{n} 2 = 2(n+1).$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(2u_{k+1} - u_k - u_{k-1}\right) + \alpha_0 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - u_{k-1}\right) + \alpha_0 \\ &= 2u_{n+1} + u_n - 3 = u_{n+1}\left(2 + \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{3}{u_{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3u_{n+1}\end{aligned}$$

donc $u_{n+1} \sim \frac{2}{3}(n+1)$, soit aussi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n$.

> Une autre démonstration consiste à appliquer le théorème de Cesaro à la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 2, on a alors :
>
> $$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
>
> converge et sa limite est 2.

e) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha_n - 2$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \alpha_n - 2 &= -\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2 \\ &= -\frac{\left(u_n - u_{n-1}\right)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)^2} = \frac{-v_n^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}\right)^2}\end{aligned}$$

Or $\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}\right)^2 = u_n\left(1 + \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 4u_n$, donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{v_n^2}{4u_n} \text{ avec } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}.$$

f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - \frac{2}{3}n$ et $\beta = f(b) = \left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n &= \left(u_n - \frac{2}{3}n\right) + 2\left(u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3}\right) \\ &= u_n + 2u_{n+1} - 2n - \frac{4}{3} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k + 3 - 2n - \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k - 2(n+1)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} w_k + 2 + 3 - \frac{4}{3}.$$

En appliquant, à nouveau, le théorème de sommation des équivalences pour les séries à termes positifs divergentes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \sim -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
$$\sim -\frac{1}{6}\,\ell n\, n$$

donc :

$$\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\,\ell n\, n.$$

g)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = \left(u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3}\right) - \left(u_n - \frac{2}{3}n\right)$$
$$= u_{n+1} - u_n - \frac{2}{3}$$
$$= v_{n+1} - \frac{2}{3}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \dfrac{2}{3}$ donc $\left(b_{n+1} - b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(b_{n+1} - b_n\right) = 0.$$

De $b_{n+1} - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\beta_n = b_n + 2b_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = -\infty$ (car $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6}\,\ell n\, n$), on tire :

$$3b_{n+1} = \left(b_{n+1} - b_n\right) + \left(b_n + 2b_{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

donc la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$. On déduit de ce résultat :

$$3b_{n+1} \sim -\frac{1}{6}\,\ell n\, n.$$

> En effet, $\dfrac{3b_{n+1}}{-\frac{1}{6}\,\ell n\, n} = \left(\dfrac{b_{n+1} - b_n}{-\frac{1}{6}\,\ell n\, n} + \dfrac{\beta_n}{-\frac{1}{6}\,\ell n\, n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, de plus, $b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{18}\,\ell n\, n$; or $u_n = b_n + \dfrac{2}{3}n$, donc :

$$u_n = \frac{2}{3}n - \frac{1}{18}\,\ell n\, n + o(\ell n\, n).$$

3 Produits infinis

Pour toute suite réelle ou complexe, le symbole :

$$\prod_{n=q}^{+\infty} u_n,$$

où q est un entier naturel donné, désigne la limite, *si elle existe*, de la suite p définie par :

$$n \mapsto \prod_{k=q}^{k=n} u_k = u_q \cdot u_{q+1} \cdot \dots \cdot u_n, \quad (n \geqslant q).$$

Partie A

1) Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

2) Soit u une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.$$

a) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. Démontrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ est non nul si et seulement si la série de terme général $\ell n\, u_n$ est convergente.

b) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe si et seulement si la série de terme général u_n est convergente.

c) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe si et seulement si $\prod_{n=0}^{+\infty}(1-u_n)$ existe et est non nul.

Partie B

1) Démontrer l'existence et calculer les valeurs de :

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$$

2) Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n| < 1 \\ \text{la série de terme général } u_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

a) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

b) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=0$ si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est divergente.

Partie C

1) Soit a la suite réelle définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\ ,\ a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

a) Étudier la nature des séries de termes généraux a_n et $(a_n)^2$.

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=3}^{+\infty}(1+a_n)$.

2) Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall\, n\in\mathbb{N}, |u_n|<1 \\ \prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ existe et est non nul} \end{cases}$$

a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est convergente.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=+\infty$$

si et seulement si la série de terme général $(u_n)^2$ est divergente.

Partie D

Soit u une suite complexe vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\neq-1$.

Montrer que si $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et vaut 0, alors la série de terme général $\ell n\,|1+u_n|$ est divergente ; de quelle manière ?

Partie E

Soit u une suite complexe vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall\, n\in\mathbb{N}, |u_n|<1 \\ \text{la série de terme général } u_n \text{ est absolument convergente} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe non nul z, on note $\operatorname{Arg} z$ l'unique réel tel que :

$$-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi \quad \text{et} \quad z=|z|\,e^{i\operatorname{Arg} z}.$$

1) Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+|u_n|)$ existe. Montrer que ce réel est strictement supérieur à 1 à une condition que l'on précisera.

2) Montrer que la suite p définie par :

$$n \mapsto \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$$

est une suite de Cauchy. On pourra démontrer et utiliser :

$$\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) - 1 \right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + |a_k|) - 1.$$

En déduire que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe.

3) Montrer que la série de terme général $\ell n\,|1 + u_n|$ est absolument convergente.

4) Montrer $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \neq 0$.

5) Montrer que la série de terme général $\operatorname{Arg}(1 + u_n)$ est absolument convergente.

Partie F

Soit u une suite complexe vérifiant $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe et est non nul.

1) Montrer que la suite u ne prend pas la valeur -1 et qu'elle admet 0 pour limite.

2) Montrer que la série de terme général $\ell n\,|1 + u_n|$ est convergente.

Solution

Partie A

1) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ la suite définie par :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} u_k \text{ pour tout } n \geqslant 2,$$

alors :

(i) si $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

donc $(p_n)_{n \geqslant 2}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$$

(ii) si $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$$

donc $(p_n)_{n \geqslant 2}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

(iii) si $u_n = 1 - \dfrac{2}{n(n+1)}$ pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!(n+2)!}{3n!(n+1)!} = \frac{n+2}{3n}$$

donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$; donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

> On peut remarquer que dans les cas (i), (ii), (iii), $u_1 = 0$ et que bien sûr :
>
> $$\prod_{k=1}^{n} u_k = 0 \quad \text{d'où l'étude de} \quad \prod_{k=2}^{n} u_k.$$

2) Soit $(p_n)_n$ la suite définie par $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) ▪ $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$ et $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$; or $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$; donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente, d'où l'existence de :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

▪ Comme u_n est strictement positif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut associer la suite $(\ell n\, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\ell n\, p_n = \sum_{k=0}^{n} \ell n\, u_k, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} ;$$

$(\ell n\, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de $\sum \ell n\, u_n$, série à termes réels tous négatifs car $u_n \in \left]0,1\right[$:

– si $\sum \ell n\, u_n$ diverge alors $(\ell n\, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$ et, en écrivant $p_n = e^{\ell n\, p_n}$, sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est nulle ; donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 ;$$

– si $\sum \ln u_n$ converge alors $\left(\ln p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit P sa limite. Par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, on en déduit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^P > 0$.

Ainsi :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = e^P.$$

En conséquence, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \neq 0$ équivaut à $\sum \ln u_n$ converge.

b) En remarquant ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < 1 + u_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln\left(1 + u_n\right) > 0.$$

Alors :

- si $\sum \ln(1 + u_n)$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(1 + u_k\right) = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + u_k\right) = +\infty$.

En effet, avec :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + u_k\right) = \ln p_n\,,$$

on voit que $\left(\ln p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes strictement positifs divergente, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln p_n = +\infty$ et, avec $p_n = e^{\ln p_n}$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.

- si $\sum \ln\left(1 + u_n\right)$ converge, soit S sa somme. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + u_k\right) = S \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \ln p_n = S.$$

Par continuité en S de la fonction exponentielle, on en déduit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^S$, et donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_k\right) = e^S.$$

En conséquence, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_n\right)$ existe si et seulement si $\sum \ln\left(1 + u_n\right)$ converge.

Or si $\sum \ln\left(1 + u_n\right)$ converge, alors la suite $\Big(\ln\left(1 + u_n\right)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, toujours par continuité de la fonction exponentielle, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est nulle. On en déduit alors :

$$\ln\left(1 + u_n\right) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n\,,$$

puis avec la règle des équivalents pour les séries à termes positifs, on obtient que $\sum u_n$ converge. Réciproquement, si $\sum u_n$ converge alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, donc $\ln\left(1+u_n\right) \sim u_n$ et toujours par la règle des équivalents des séries à termes positifs $\sum \ln\left(1+u_n\right)$ converge. Ainsi :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}$$

c) La règle des équivalents pour les séries à termes positifs donne les équivalences successives suivantes :

$$\sum \ell n\left(1+u_n\right) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$
$$\sum \ell n\left(1-u_n\right) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

puis, d'après b) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \sum u_n \text{ converge}$$

et, d'après a) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-u_n\right) \text{ existe et est non nul si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}$$

D'où le résultat :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right) \text{ existe si et seulement si } \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-u_n\right) \text{ existe et est non nul.}$$

> On peut remarquer qu'avec l'hypothèse $u_n \in \left]0,1\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n}\left(1+u_n\right) > 1 \quad \text{et} \quad 0 < \prod_{k=0}^{n}\left(1-u_n\right) < 1.$$

Partie B

1) ▪ $\displaystyle\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Posons :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} u_k \quad \text{où } u_k = 1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

et étudions la suite extraite de rang impair $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$p_{2n+1} = \prod_{k=2}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2n+2}{2} \times \frac{1}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$$

Donc la suite extraite de rang impair converge et sa limite est $1/2$.

La suite extraite de rang pair $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$p_{2n} = p_{2n-1} \times u_{2n}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{2n} = p_{2n-1}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$ alors $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{2n} = \frac{1}{2}.$

(p_n) ayant ses suites extraites de rang impair et de rang pair convergentes et de même limite, converge donc avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 1/2$ et on en conclut :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \frac{1}{2}.$$

▪ Posons $u_n = \ell n\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$, $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

La série $\sum v_n$ converge d'après le critère des séries alternées.

De $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on déduit que $w_n \sim -\dfrac{1}{2n}$ donc la série $\sum w_n$ diverge par application de la règle des équivalents, avec de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = -\infty$$

car il s'agit d'une série à termes négatifs à partir d'un certain rang.

On en déduit que $\sum u_n$ diverge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} u_k = -\infty$$

donc :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

En effet, en posant à nouveau :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right), \text{ donc } \ell n\, p_n = \sum_{k=2}^{n} u_k\,,$$

puisque $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$, $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0 (car $p_n = e^{\ell n\, p_n}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$).

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, $\sum u_n$ converge donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on a :

$$\ell n\left(1 + u_n\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right).$$

- Si $\sum u_n^2$ converge, comme $\sum u_n$ converge, alors $\sum \ell n\left(1 + u_n\right)$ converge de somme S, or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell n\, p_n = \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1 + u_k\right)$$

donc la suite $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P = e^S > 0$ par continuité de la fonction exponentielle, donc :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_n\right) = P.$$

- Si $\sum u_n^2$ diverge, alors puisque $v_n = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + o\left(u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}u_n^2$, d'après la règle des équivalents, la série $\sum v_n$ est également divergente, à termes négatifs à partir d'un certain rang.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = -\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\ell n\left(1 + u_k\right) - u_k\right) = -\infty$.

Or $\sum u_n$ est convergente, donc $\sum \ell n\left(1 + u_n\right)$ est divergente et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell n\left(1 + u_k\right) = -\infty,$$

d'où il résulte que $\left(\ell n\, p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $-\infty$ puis que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ c'est-à-dire :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right)=0.$$

b) D'après a) (avec les hypothèses : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|<1$ et $\sum u_n$ converge) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+u_n\right)$$

existe dans tous les cas et est nul si et seulement si $\sum u_n^2$ diverge.

Partie C

1) $a_{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $a_{2n-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) $\sum a_n$: $a_{2n}+a_{2n-1}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{n}$, donc $\sum\left(a_{2n}+a_{2n-1}\right)$ diverge d'après la règle des équivalents pour les séries à termes positifs.

$\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$, on a pour tout $n\geqslant 1$, $S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_{2k}+a_{2k-1}\right)$, donc $\left(S_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en tendant vers $+\infty$, et $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi, c'est-à-dire que $\sum a_n$ diverge.

$\sum a_n^2$: $a_{2n}^2\geqslant\dfrac{1}{n}$, $a_{2n+1}^2=\dfrac{1}{n}$ donc $a_n^2\geqslant\dfrac{1}{n}$ et $\sum a_n^2$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs avec $\sum(1/n)$ série divergente.

b) Posons $p_n=\prod\limits_{k=3}^{n}\left(1+a_k\right)$.

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ \left(1+a_{2n-1}\right)\left(1+a_{2n}\right)&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

donc :

$$p_{2n}=\prod_{k=2}^{n}\left(1+a_{2k-1}\right)\left(1+a_{2k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\quad\text{d'après A.1)a).}$$

Or :

$$p_{2n+1}=p_{2n}\times\left(1+a_{2n+1}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

donc $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2\}}$ converge et :

$$\prod_{n=3}^{+\infty}(1+a_n)=\frac{1}{2}$$

(en effet, les suites extraites de rang pair et de rang impair convergent et ont la même limite $1/2$, donc (p_n) converge).

2) a) On suppose que $|u_n|<1$, et que :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$$

existe et est $\neq 0$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ell n\,(1+u_n)$ a un sens et en posant :

$$p_n=\prod_{k=0}^{n}(1+u_k),\text{ on a } \ell n\, p_n=\sum_{k=0}^{n}\ell n\,(1+u_k).$$

Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite p est positive (car $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $1+u_k>0$ donc $p_n>0$) et non nulle par hypothèse, on obtient que la suite $(\ell n\, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ell n\, p$ (continuité de la fonction ℓn). Donc $\sum \ell n\,(1+u_n)$ est convergente, ce qui entraîne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0, donc :

$$\ell n\,(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$$

et les séries :

$$\sum u_n \text{ et } \sum\left(-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)\right)$$

sont de même nature. Or par la règle des équivalents des séries de termes de signe constant les séries :

$$-\frac{u_n^2}{2}\quad\text{et}\quad-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$$

sont de même nature, de plus $\sum-\frac{u_n^2}{2}$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature, donc $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Ainsi $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

b) On a aussi $u_n-\ell n\,(1+u_n)\sim\frac{u_n^2}{2}$.

$\sum u_n^2$ diverge si et seulement si $\sum(1/2)u_n^2$ est divergente et on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}u_k^2=+\infty$$

donc, d'après la règle des équivalents pour les séries à termes positifs divergentes, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(u_k-\ell n\,(1+u_k)\Big)=+\infty.$$

Enfin, puisque $\sum\ell n\,(1+u_n)$ converge, on en déduit que :

$$\sum u_n \text{ diverge}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=+\infty.$$

La réciproque est évidente.

Partie D

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. On suppose que :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + u_n\right) = 0$$

ce qui signifie que la suite $\left(p_n\right)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + u_k\right)$$

converge et a pour limite 0 donc $\left(\,|p_n|\,\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0 ; or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, |p_n| = \prod_{k=0}^{n} |1 + u_k|$$

donc la série de terme général $\ell n\,|1 + u_n|$ diverge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell n\,|1 + u_k| = -\infty.$$

Partie E

1) Comme $\sum |u_n|$ est absolument convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, d'après B.a) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + |u_n|\right) \text{ existe.}$$

Comme $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0 car $\sum |u_n|$ est absolument convergente, on a :

$$\ell n\left(1 + |u_n|\right) \underset{n\to\infty}{\sim} |u_n|.$$

D'après la règle des équivalents des séries à termes positifs : $\sum \ell n\left(1 + |u_n|\right)$ est une série convergente et, en posant :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell n\left(1 + |u_n|\right),$$

on a :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + |u_n|\right) = e^{S} \geqslant 1$$

(car $S \in \mathbb{R}^{+}$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$), donc :

$$\begin{aligned} e^{S} > 1 &\iff S \in \mathbb{R}_+^* \iff \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \ell n\left(1 + |u_{n_0}|\right) > 0 \\ &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N},\, |u_{n_0}| \neq 0 \end{aligned}$$

2) On développe :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a_k\right) &= 1 + \sum a_{k_1} + \sum a_{k_1} a_{k_2} + \sum a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} + \cdots + \prod a_{k_i} \\ &= 1 + P\left(a_1, \ldots, a_n\right) \\ \prod_{k=1}^{n} \left(1 + |a_k|\right) &= 1 + \sum \left|a_{k_1}\right| + \sum \left|a_{k_1} a_{k_2}\right| + \sum \left|a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}\right| + \cdots + \prod \left|a_{k_i}\right| \\ &= 1 + P\left(\,|a_1|, \ldots, |a_n|\,\right) \end{aligned}$$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1\right| = \left|P(a_1,\ldots,a_n)\right| \leqslant P(|a_1|,\ldots,|a_n|) = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)-1.$$

En conséquence $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ est de Cauchy, en effet :

$$\prod_{k=0}^{n+p}(1+u_k) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k) = \left(\prod_{k=n}^{n+p}(1+u_k)-1\right)\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=0}^{n+p}(1+u_k) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)\right| &\leqslant \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+|u_k|)\right)\left(\prod_{k=n}^{n+p}(1+|u_k|)-1\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n+p}(1+|u_k|) - \prod_{k=0}^{n-1}(1+|u_k|)\end{aligned}$$

et, puisque la suite $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)$ est de Cauchy, il en est de même pour $n \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$.

Donc la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et on en déduit que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

3) Montrons que $\sum \ell n\,|1+u_n|$ est absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = x_n + iy_n$, alors :

$$\begin{aligned}|1+u_n|^2 = (1+u_n)(1+\overline{u}_n) &= 1 + 2\,\mathrm{Re}\,u_n + |u_n|^2\\ &= 1 + 2x_n + |u_n|^2.\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^2 \leqslant |u_n|$, et d'autre part : $|x_n| = |\mathrm{Re}\,u_n| \leqslant |u_n|$, donc d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum u_n$ est absolument convergente, les séries :

$$\sum |u_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum |x_n| \quad \text{sont convergentes.}$$

On peut donc faire un développement limité (car les suites (x_n) et $(|u_n|)^2$ convergent vers **0**) :

$$\ell n\,|1+u_n| = \frac{1}{2}\,\ell n\left(1+2x_n+|u_n|^2\right) = \frac{1}{2}\Big(2x_n + o(|u_n|)\Big) = x_n + o(|u_n|)$$

car $|u_n|^2 = o(|u_n|)$ et $|x_n| \leqslant |u_n|$.

On en déduit que la série de terme général $\ell n\,|1+u_n|$ est absolument convergente.

4) $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k) &= \prod_{k=0}^{n}\left(|1+u_k|\,e^{i(\mathrm{Arg}(1+u_n))}\right)\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}|1+u_k|\right)\prod_{k=0}^{n}\left(e^{i(\mathrm{Arg}(1+u_n))}\right)\\ &= \left(\prod_{k=0}^{n}|1+u_k|\right)e^{i\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{Arg}(1+u_n)}\end{aligned}$$

donc :

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right| = \prod_{k=0}^{n}|1+u_k| = p_n.$$

Or $\ell n\, p_n = \sum_{k=0}^{n} \ell n\,|1+u_k|$ (par hypotèse $|u_k| < 1$ donc $|1+u_k| \neq 0$) donc :

$$p_n = e^{\sum\limits_{k=0}^{n} \ell n\,|1+u_n|}.$$

La série $\sum \ell n\,|1+u_n|$ étant absolument convergente, soit S sa somme, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (continuité de la fonction exponentielle) et :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^S > 0,$$

donc $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $e^S > 0$ ainsi :

$$\left|\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n)\right| \neq 0 \quad \text{donc} \quad \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n) \neq 0.$$

5) Soit (v_n) définie par $v_n = |u_n|\, e^{i|\mathrm{Arg}\, u_n|}$ alors $\mathrm{Arg}\,(1+v_n) = |\mathrm{Arg}\,(1+u_n)|$, et on a $|v_n| = |u_n|$, donc d'après 2) :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+v_n) \text{ existe.}$$

Or $\mathrm{Arg}\prod_{k=0}^{n}(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Arg}\,(1+v_k) = \sum_{k=0}^{n}|\mathrm{Arg}\,(1+u_k)|$ tend vers $\mathrm{Arg}\prod_{n=0}^{+\infty}(1+v_n)$ donc $\sum \mathrm{Arg}\,(1+u_n)$ est absolument convergente.

Partie F

1) u ne prend pas la valeur -1 ; en effet supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = -1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, supérieur à n_0, $p_n = 0$ et la suite constante $(p_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite 0, ce qui est contraire à :

$$\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ est } \neq 0.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$, par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 + u_n \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1$$

or $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite P est $\neq 0$ donc :

$$\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge et sa limite est $\frac{P}{P} = 1$, ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

converge, et sa limite est $P \neq 0$; donc la suite réelle $(|p_n|)_n$ converge et sa limite est $|P|$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |p_n| = \prod_{k=0}^{n} |1 + u_k|.$$

Alors, la fonction ℓn étant continue, la suite $\left(\ell n\, |p_n| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\ell n\, |P|$; c'est-à-dire que la série de terme général $\ell n\, |1 + u_n|$ converge et que sa somme est $\ell n\, |P|$.

Avec $\ell n\, |P| = \ell n \left(\prod_{n=0}^{+\infty} |1 + u_n| \right)$, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ell n\, |1 + u_n| = \ell n \left(\prod_{n=0}^{+\infty} |1 + u_n| \right).$$

CHAPITRE 4

Espaces préhilbertiens Espaces euclidiens Coniques – Quadriques

(A) Produit scalaire

Ex. 1

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in E^n$, $(y_i)_{1\leq i\leq n}\in E^n$ deux familles de vecteurs telles que :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \langle x_i \mid x_j\rangle = \langle y_i \mid y_j\rangle.$$

On pose $X = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = \mathrm{Vect}\,(y_i)_{1\leq i\leq n}$.

1) Comparer $\dim X$ et $\dim Y$.

2) Montrer qu'il existe une application linéaire unique f telle que :

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\ f(x_i) = y_i$$

et que cette application est un isomorphisme de X sur Y.

1) La matrice $G(X)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de terme général $\langle x_i \mid y_i\rangle$, n'est autre que la matrice de Gram du système $(x_1,\ldots,x_n)$. Une première solution consiste donc à démontrer que :

$$\mathrm{rg}\, G(X) = \mathrm{rg}\,(x_i)_{1\leq i\leq n}.$$

- Première solution

Posons $G(X) = [\langle x_i \mid x_j\rangle] : G(X)\in S_n(\mathbb{R})$.

Si $(x_1 \cdots x_n)$ est libre, c'est une base de X et $G(X)$ est la matrice sur cette base du produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ de l'espace X. Dans ce cas, on a donc $G(X)\in GL_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, G(X) = n = \dim X$.

Remarquons maintenant que si l'on fait subir aux vecteurs x_i, $1\leq i\leq n$, une permutation $\sigma\in \mathfrak{S}_n$, la matrice de Gram :

$$G(X_\sigma) = [\langle x_{\sigma(i)} \mid x_{\sigma(j)}\rangle]$$

du système $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ se déduit de $G(X)$ en effectuant cette permutation σ sur les colonnes et sur les lignes, et on a donc :

$$\mathrm{rg}\, G(X) = \mathrm{rg}\, G(X_\sigma).$$

Supposons $\mathrm{rg}\,(x_1,\ldots,x_n) = r$ avec $1\leq r<n$. À une permutation près, on peut se ramener au cas où $(x_1,\ldots,x_r)$ est libre avec :

$$\forall i\in [\![r+1,n]\!],\ x_i\in \mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n).$$

Alors pour tout $i\in [\![r+1,n]\!]$, il existe $(\lambda_{i,1},\ldots,\lambda_{i,r})\in\mathbb{R}^r$ tel que :

$$x_i = \sum_{k=1}^{r}\lambda_{i,k}x_k$$

d'où :

$$\forall j\in [\![1,n]\!],\ \langle x_i \mid x_j\rangle = \sum_{k=1}^{r}\lambda_{i,k}\langle x_k \mid x_j\rangle$$

soit aussi :

$$L_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i,k} L_k \quad \text{et} \quad C_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i,k} C_k$$

en notant $L_1, \dots, L_n$ et $C_1, \dots, C_n$ les lignes et colonnes de $G(X)$. On en déduit :

$$\operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \operatorname{rg}\left[\left\langle x_i \mid x_j \right\rangle\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$$

et, puisque $(x_1, \dots, x_r)$ est libre, $\operatorname{rg} G(X) = r$ c'est-à-dire $\operatorname{rg} G(X) = \dim X$.

Notons enfin que si $G(X) = 0$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ donc $X = \{0\}$ et on a encore :

$$\operatorname{rg} G(X) = \dim X.$$

Cette propriété est donc vraie dans les tous les cas.

Conséquence : avec $G(X) = G(Y)$, il vient $\dim X = \dim Y$.

- Deuxième solution

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est réduit au vecteur nul, il en est de même pour $(y_1, \dots, y_n)$ et on a :

$$\dim X = \dim Y = 0.$$

On suppose maintenant que $(x_1, \dots, x_n)$ est non réduit à 0, il en est donc de même pour $(y_1, \dots, y_n)$ et on a :

$$\dim X \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \dim Y \geqslant 1.$$

Posons $p = \dim X$ et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormale de X. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $\left(\alpha_{ij}\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tel que :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

et on pose :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j .$$

Il vient alors pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\left\langle v_i \mid v_j \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} \left\langle y_k \mid y_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} \left\langle x_k \mid x_\ell \right\rangle \\ &= \left\langle u_i \mid u_j \right\rangle = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est un système orthonormal, donc libre, de Y et $p \leqslant \dim Y$, c'est-à-dire :

$$\dim X \leqslant \dim Y.$$

Symétriquement, on a aussi $\dim Y \leqslant \dim X$, d'où finalement $\dim X = \dim Y$.

2) Posons $p = \dim X = \dim Y$ et écartons le cas trivial où $p = 0$. À une permutation près, on peut se ramener au cas où $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de X et $(y_1, \dots, y_p)$ une base de Y. Alors on sait qu'il existe une application linéaire f et une seule de X dans Y telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], f\left(x_i\right) = y_i$$

et cette application est un isomorphisme de X sur Y. Il reste donc à démontrer que l'on a encore $f\left(x_i\right) = y_i$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$.

Remarquons d'abord que f conserve le produit scalaire. En effet, pour $(x, x') \in X^2$, il existe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ et $(\alpha'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$, uniques, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i x_i$$

et, par définition de f, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid f(x') \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j f(x_j) \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} \alpha'_j y_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \alpha'_j \langle y_i \mid y_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \alpha'_j \langle x_i \mid x_j \rangle = \langle x \mid x' \rangle\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![p+1, n]\!] \quad \left\langle f(x_i) \,\middle|\, f(x_j) \right\rangle = \langle x_i \mid x_j \rangle$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \langle y_i \mid f(x_j) \rangle = \langle y_i \mid y_j \rangle$$

$$\text{ou encore} \quad \langle y_i \mid f(x_j) - y_j \rangle = 0.$$

Puisque $(y_1, \ldots, y_p)$ est une base Y, ces relations (vraies pour $i = 1, \ldots, p$) donnent que $f(x_j) - y_j \in Y^{\perp}$ et comme d'autre part $f(x_j) - y_j \in Y$, il vient :

$$f(x_j) - y_j \in Y \cap Y^{\perp} \quad \text{soit} \quad f(x_j) - y_j = 0.$$

On a ainsi prouvé que $f(x_j) = y_j$ pour tout $y \in [\![1, n]\!]$.

(B) Projections orthogonales – Distances

Ex. 2

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t.$

1) Montrer que φ est un produit scalaire.

2) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin(n+1)u = \sin u \; Q_n(\cos u).$$

Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.

3) Montrer que les Q_n sont deux à deux orthogonaux.

4) On considère l'application :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \int_{-1}^{1} \left(t^3 + xt^2 + yt + z\right)^2 \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que g admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint.

1) C'est presque du cours. Il faut simplement montrer à l'examinateur que l'on connaît parfaitement les définitions usuelles et ceci sans s'étendre exagérément sur le sujet.

Il est clair que φ est une application symétrique, et la linéarité de l'intégrale nous donne que φ est bilinéaire symétrique.

Pour $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, la fonction $t \mapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$, donc :

$$\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t > 0.$$

On a ainsi vérifié que φ est un produit scalaire.

2) Là aussi la question est classique : les Q_n sont les polynômes de Tchebichev de deuxième espèce.

Avec :

$$\begin{aligned}\sin(n+1)u &= \operatorname{Im}\left(\cos u + i\sin u\right)^{n+1} = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k}\, i^k \sin^k u \cos^{n+1-k} u \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k+1} u \cos^{n-2k} u \\ &= \sin u \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k\left(1-\cos^2 u\right)^k \cos^{n-2k} u.\end{aligned}$$

on voit que les polynômes :

$$Q_n(X) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}(-1)^k\left(1-X^2\right)^k X^{n-2k}$$

conviennent.

Compte tenu de $\deg\left(1-X^2\right)^k X^{n-2k} = n$, on obtient $\deg Q_n \leqslant n$ et, puisque le coefficient de X^n est :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} > 0$$

on a $\deg Q_n = n$.

En développant par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(1+1)^{n+1} &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} \\ \text{et} \qquad (1-1)^{n+1} &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} + \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1}\end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{2k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} = 2^n$$

ce qui donne le coefficient dominant de Q_n.

Notons enfin que l'unicité est évidente. En effet, si un polynôme R_n vérifie également :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \sin(n+1)u = \sin u\, R_n(\cos u)$$

on voit que le polynôme $Q_n - R_n$ a une infinité de racines et qu'il est donc nul.

3) La définition des Q_n doit inciter à calculer les intégrales :

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_p(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

au moyen du changement de variable défini par $x = \cos u$.

On a :

$$\begin{aligned}\left\langle Q_n \,\middle|\, Q_p\right\rangle &= \int_0^{\pi} Q_n(\cos u)Q_p(\cos u)\sin^2 u\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\pi} \sin(n+1)u\sin(p+1)u\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(\cos(n+p+2)u-\cos(n-p)u\big)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

donc, pour $n \neq p$:

$$\left\langle Q_n \,\middle|\, Q_p\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-p)u}{n-p}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p+2)u}{n+p+2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

On a ainsi vérifié que la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et on peut aussi remarquer que ce calcul donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|Q_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(1-\cos 2(n+1)u\big)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \|Q_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous notons X^n la fonction polynôme $x\mapsto x^n$, le problème revient ici à minimiser $\|X^3-P\|^2$ lorsque P décrit $\mathbb{R}_2[X]$. C'est du cours : on sait que ce minimum est atteint en un point P et un seul qui est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

D'après le 3), une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ est (Q_0, Q_1, Q_2), donc le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$P = \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_0\right\rangle Q_0}{\|Q_0\|^2} + \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_1\right\rangle Q_1}{\|Q_1\|^2} + \frac{\left\langle X^3 \,\middle|\, Q_2\right\rangle Q_2}{\|Q_2\|^2}$$

soit $$P = \frac{2}{\pi}\Big(\left\langle X^3 \,\middle|\, 1\right\rangle + 4\left\langle X^3 \,\middle|\, X\right\rangle X + \left\langle X^3 \,\middle|\, 4X^2-1\right\rangle(4X^2-1)\Big).$$

Pour tout n, p entiers naturels, on a :

$$\left\langle X^n \,\middle|\, X^p\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^{n+p}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\cos^{n+p}u\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

donc, si $n+p$ est impair, la fonction $\varphi\ :\ u\mapsto \cos^{n+p}u\sin^2 u$ vérifie $\varphi(\pi-u) = -\varphi(u)$ et :

$$\left\langle X^n \,\middle|\, X^p\right\rangle = \int_0^{\pi}\varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

D'autre part, on obtient :

$$\left\langle X^3 \,\middle|\, X\right\rangle = \int_0^{\pi}\cos^4 u\sin^2 u\,\mathrm{d}u$$

et par linéarisation :

$$\cos^4 u\sin^2 u = \frac{1}{32}\big(2+\cos 2u - 2\cos 4u - \cos 6u\big)$$

d'où $\left\langle X^3 \,\middle|\, X\right\rangle = \dfrac{\pi}{16}$ et finalement $P = \dfrac{X}{2}$.

Ainsi la fonction g atteint son minimum au point :

$$(x,y,z) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

et, d'après le théorème de Pythagore, ce minimum est égal à :

$$\|X^3-P\|^2 = \|X^3\|^2 - \|P\|^2 = \|X^3\|^2 - \frac{1}{4}\|X\|^2.$$

Le calcul fournit :

$$\left\|X^3\right\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{128}$$

$$\|X\|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

d'où :

$$\left\|X^3 - P\right\|^2 = \min_{\mathbb{R}_2[X]} g = \frac{5\pi}{128} - \frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{128}.$$

Ex. 3

Trouver $\inf_{(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

La question est classique. En considérant un espace préhilbertien bien choisi, on interprète le minimum demandé, au moyen de la distance d'un point, à un sous-espace de dimension finie.

Introduisons sur l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n\left[X\right]$ le produit scalaire :

$$E^2 \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Les vérifications d'usage pour un produit scalaire sont aisées et laissées au lecteur.

Néammoins, il faut prendre garde à ne pas omettre de prouver que, quels que soient f et g dans E, la fonction $x \mapsto f(x)g(x)e^{-x}$ est intégrable sur $\left[0, +\infty\right[$, ce qui résulte de sa continuité et, par exemple, de $f(x)g(x)e^{-x} \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(x^{2n}e^{-x}\right)$ donc :

$$f(x)g(x)e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si H désigne l'hyperplan Vect $\left(X, X^2, \ldots, X^n\right)$, il s'agit d'évaluer :

$$d^2(1, H) = \inf_{P\in H} \| 1 - P\|^2.$$

Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur H, alors :

$$d^2(1, H) = \| 1 - Q\|^2 = \| 1 \|^2 - \| Q\|^2.$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x = k!.$$

En notant $Q = \sum_{j=1}^{n} a_j X^j$ le vecteur $1 - Q$ est caractérisé par :

$$\forall k \in \left\{1, 2, \ldots, n\right\},\ \left\langle 1 - Q \,\middle|\, X^k\right\rangle = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ k! - \sum_{j=1}^{n} (j+k)!\,a_j = 0.$$

Nous sommes maintenant ramené, comme il est usuel, à la résolution d'un système linéaire. Or, il est difficilement envisageable d'utiliser la méthode traditionnelle du pivot de Gauss, ce qui fait que la question est ici bien moins classique. Une idée intéressante est d'observer que l'on sait que ce système admet une solution et une seule donc, si on peut en exhiber une, par exemple, grâce à une identité algébrique bien choisie, ce sera la bonne.

Uitlisons alors le calcul auxiliaire suivant :

$$(1-X)^n X^k = X^k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \complement_n^j X^{j+k}$$

$$\left[(1-X)^n X^k\right]^{(k+1)} = k!X + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \complement_n^j (j+k)! \frac{X^{j+1}}{(j+1)!}$$

et, pour $X = 1$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 0 = k! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \complement_n^j \frac{(j+k)!}{(j+1)!}.$$

L'unicité de Q donne alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \complement_n^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \complement_n^j X^j$$

Formons alors :

$$d^2(1, H) = \| 1 \|^2 - \| Q \|^2 = \| 1 \|^2 - \langle 1 \mid Q \rangle$$

$$d^2(1, H) = 1 - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \complement_n^j x^j \right) e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

$$d^2(1, H) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \complement_n^j = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \complement_{n+1}^{j+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \complement_{n+1}^j$$

Or $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \complement_{n+1}^j = (1-1)^{n+1} = 0$ donc :

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \complement_{n+1}^j = -1 + (n+1) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \complement_{n+1}^j = n$$

et :

$$d^2(1, H) = 1 - \frac{n}{n+1}.$$

En conclusion :

$$\inf_{(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 e^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Ex. 4

Trouver $f \in \mathcal{C}^0\left(\left[0, 1\right], \mathbb{R}\right)$ telle que :

$$\int_0^1 f(x) h''(x) \, \mathrm{d}x = 0 \ \text{ pour tout } h \in F$$

où $F = \left\{ h \in \mathcal{C}^2\left(\left[0, 1\right], \mathbb{R}\right) \,/\, h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0 \right\}$.

Étant donné $E = \mathcal{C}^0\left(\left[0, 1\right], \mathbb{R}\right)$, on sait que l'application :

$$E^2 \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$$

est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

D'autre part, il est clair que F est un sous-espace vectoriel de E et, puisque l'opérateur de dérivation est linéaire, lorsque h décrit F, h'' décrit le sous-espace vectoriel $H = D^2(F)$. Le problème revient donc à déterminer l'orthogonal $H^\perp$ de D^2F et la question est évidemment compliquée par le fait que H n'est pas de dimension finie.

Remarquons d'abord que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, deux intégrations par parties successives donnent pour tout $h \in F$:

$$\int_0^1 f(x)h''(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)h'(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f'(x)h'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(x)h''(x)\,\mathrm{d}x = \big[-f'(x)h(x)\big]_0^1 + \int_0^1 f''(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f''(x)h(x)\,\mathrm{d}x$$

donc :

$$\langle f \mid h'' \rangle = \langle f'' \mid h \rangle.$$

De ce calcul il résulte que toute fonction affine appartient à $H^\perp$ puisque l'on a alors $f'' = 0$. En notant A le plan vectoriel de E constitué des fonctions affines, cela s'écrit $A \subset H^\perp$.

A est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $\mathrm{Id} \;:\; x \mapsto x$ et $1 \;:\; x \mapsto 1$.

Nous nous proposons maintenant de prouver que $H^\perp \subset A$, c'est-à-dire que tout f de $H^\perp$ est égal à son projeté orthogonal g sur A.

A étant de dimension finie, on a $E = A \oplus A^\perp$, ce qui permet de définir la projection orthogonale sur A.

Avec cette définition de g, on a $f - g \in A^\perp$. Montrons que l'on a aussi $f - g \in H$, c'est-à-dire qu'il existe $h \in \mathcal{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ vérifiant :

$$f - g = h'' \quad \text{et} \quad h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0.$$

Si une telle fonction h existe, on a nécessairement :

$$\forall x \in [0,1],\ h'(x) = \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_0^t \big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

soit, d'après Fubini :

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_u^x \big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)\big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

La continuité de f et g donne celle de $(u,t) \mapsto f(u) - g(u)$ et justifie l'application du théorème de Fubini.

Réciproquement, puisque f et g sont continues sur $[0,1]$, la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, puis :

$$h \;:\; x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^t \big(f(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ avec :

$$h'(x) = \int_0^x \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h''(x) = f(x) - g(x)$$

et on a évidemment :

$$h'(0) = h(0) = 0.$$

D'autre part, $f - g \in A^{\perp}$ donne $\langle f - g \mid 1 \rangle = 0$ et $\langle f - g \mid \mathrm{Id} \rangle = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 t\big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc aussi :

$$h'(1) = 0 \quad \text{et} \quad h(1) = \int_0^1 (1-t)\big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On a ainsi montré qu'il existe h unique dans $C^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ vérifiant :

$$f - g = h'' \text{ et } h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0, \text{ donc que } f - g \in H.$$

Avec $f \in H^{\perp}$ et $f - g \in H$, on obtient $\langle f \mid f - g \rangle = 0$ et, avec $g \in A$ et $f - g \in A^{\perp}$, il vient :

$$\langle g \mid f - g \rangle = 0 \quad \text{d'où} \quad \|f - g\|^2 = \langle f - g \mid f - g \rangle = 0 \quad \text{et enfin} \quad f = g,$$

ce qui prouve que $f \in A$ et donc $H^{\perp} \subset A$.

En conclusion, on a $H^{\perp} = A$ c'est-à-dire que les fonctions f recherchées sont les fonctions affines :

$$x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

(C) Adjoint Réduction des endomorphismes symétriques

Ex. 5

Soit E un espace euclidien de dimension n. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de E.

Pour $r \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{V}_r$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension r. Enfin, on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques) de E.

1) Soit $A \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$. Montrer que :

$$\forall r \in [\![1, n]\!],\ \lambda_r = \min_{V \in \mathcal{V}_r} \max_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle x \mid Ax \rangle.$$

2) Soit $B \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ avec $\mu_i \leqslant \mu_{i+1}$. Montrer que :

$$\forall r \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_r - \mu_r| \leqslant |\!|\!|A - B|\!|\!|.$$

1) La première chose à faire est évidemment d'utiliser que A est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de A :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ Ae_i = \lambda_i e_i.$$

Pour tout $x \in E$, on pose :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et il vient :

$$\langle x \mid Ax \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Pour tout $x \in [\![1, n]\!]$ et tout $V \in \mathcal{V}_r$, l'ensemble :

$$S_V = \left\{ x \in V \;/\; \| x \| = 1 \right\}$$

est un compact en tant que fermé-borné d'un espace de dimension finie et l'application :

$$q \;:\; x \mapsto \left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle$$

est continue car A est continue en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie et le produit scalaire est continu sur E^2. Il en résulte que q est bornée sur S_V et qu'elle atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de :

$$M_V = \max \left\{ \left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle \;/\; x \in S_V \right\}.$$

De :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

on déduit :

$$\forall x \in E, \| x \| = 1 \;\Rightarrow\; q(x) \geqslant \lambda_1$$

donc l'ensemble $\left\{ M_V \;/\; V \in \mathcal{V}_r \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et minoré par λ_1 ce qui assure l'existence de :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V .$$

> On notera cependant que, d'après l'énoncé, cette borne inférieure doit être un minimum. Pour le justifier, il va donc falloir prouver qu'elle est atteinte.

Le sous-espace $V_r = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_r\right)$ est de dimension r et pour $x \in V_r$ tel que $\| x \| = 1$, on a :

$$\left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_r \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = \lambda_r ,$$

donc :

$$\max_{x \in S_{V_r}} \left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle \leqslant \lambda_r .$$

D'autre part, $\left\langle e_r \,\middle|\, Ae_r \right\rangle = \lambda_r$ avec $e_r \in V_r$ et $\| e_r \| = 1$, donc :

$$\lambda_r = \max_{x \in S_{V_r}} \left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle$$

et il en résulte :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V \leqslant \lambda_r. \qquad (i)$$

Soit maintenant $V \in \mathcal{V}_r$: V est quelconque de dimension r. Posons :

$$W = \mathrm{Vect}\left(e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\right).$$

Pour $x \in W$ tel que $\| x \| = 1$, on a :

$$\left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle \geqslant \lambda_r .$$

Puisque $\dim V + \dim W = n + 1$, on a $\dim V \cap W \geqslant 1$ donc il existe $z \in V \cap W$ tel que $\| z \| = 1$ et alors $\left\langle z \,\middle|\, Az \right\rangle \geqslant \lambda_r$ montre que :

$$M_V = \max_{x \in S_V} \left\langle x \,\middle|\, Ax \right\rangle \geqslant \lambda_r .$$

Ceci étant vrai pour tout $V \in \mathcal{V}_r$ on en déduit :

$$m = \inf_{V \in \mathcal{V}_r} M_V \geqslant \lambda_r . \qquad (ii)$$

Enfin les inégalités (i) et (ii) donnent $m = \lambda_r$ et la valeur λ_r étant atteinte ($q\left(e_r\right) = \lambda_r$), cette borne inférieure est un minimum.

2) Au besoin en échangeant A et B, on peut supposer que $\mu_r \leqslant \lambda_r$ et alors :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \lambda_r - \mu_r = \min_{V \in \mathscr{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Ax \rangle - \min_{V \in \mathscr{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Bx \rangle.$$

Il existe $V_0 \in \mathscr{V}_r$ tel que :

$$\min_{V \in \mathscr{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Bx \rangle = \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle,$$

d'où :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \min_{V \in \mathscr{V}_r} \max_{x \in S_V} \langle x \mid Ax \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle \leqslant \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Ax \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle.$$

Il existe $x_0 \in S_{V_0}$ tel que :

$$\max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Ax \rangle = \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle,$$

d'où :

$$|\lambda_r - \mu_r| = \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle - \max_{x \in S_{V_0}} \langle x \mid Bx \rangle \leqslant \langle x_0 \mid Ax_0 \rangle - \langle x_0 \mid Bx_0 \rangle,$$

soit :

$$|\lambda_r - \mu_r| \leqslant \langle x_0 \mid (A - B)x_0 \rangle$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $|||A - B|||$:

$$|\lambda_r - \mu_r| \leqslant \|x_0\| \; \|(A - B)x_0\| \leqslant |||A - B||| \, \|x_0\|^2 = |||A - B|||.$$

Ex. 6

L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique, on le suppose muni de sa structure euclidienne canonique et S désigne sa sphère unité :

$$S = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;/\; \|X\| = 1\right\}.$$

Une matrice A symétrique réelle d'ordre n étant donnée, calculer :

$$\inf\left\{\mathrm{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right] \;/\; \lambda \in \mathbb{R}, X \in S\right\}.$$

> Il est visible que $\lambda \mapsto \mathrm{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right]$ est une fonction polynôme. La première chose à faire semble être de développer cette expression.

Posons $F(X, \lambda) = \mathrm{Tr}\left[\left(A - \lambda X\,{}^tX\right)^2\right]$. En développant le carré et sachant que Tr est linéaire, il vient :

$$F(X, \lambda) = \lambda^2\,\mathrm{Tr}\left(X\,{}^tXX\,{}^tX\right) - \lambda\,\mathrm{Tr}\left(AX\,{}^tX\right) - \lambda\,\mathrm{Tr}\left(X\,{}^tXA\right) + \mathrm{Tr}\left(A^2\right)$$

puis avec la propriété fondamentale $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$:

$$F(X, \lambda) = \lambda^2\,\mathrm{Tr}\left({}^tXX\,{}^tXX\right) - 2\,\lambda\,\mathrm{Tr}\left({}^tXAX\right) + \mathrm{Tr}\left(A^2\right).$$

On remarque alors que ${}^tXX = \|X\|^2 = 1$ lorsque $X \in S$, et que ${}^tXAX$ est sur $\mathbb{R}^n$, l'expression matricielle de $q_A(X)$ où q_A est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à A dans la base canonique, pour obtenir finalement :

$$F(X, \lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda\,q_A(X) + \mathrm{Tr}\left(A^2\right).$$

Pour tout $X \in S$ fixé, la fonction polynôme $\lambda \mapsto F(X, \lambda)$ atteint son minimum au point $\lambda_0 = q_A(X)$, la valeur de ce minimum est :

$$m(X) = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) - q_A(X)^2.$$

> Pour simplifier cette expression, il faut maintenant penser à réduire A dans le groupe orthogonal.

On sait qu'il existe $P \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \mathrm{diag}\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)$ où les μ_i sont les valeurs propres de A et on peut supposer que cette réduction a été effectuée de façon que :

$$|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots \leqslant |\mu_n|.$$

En posant $X = PY$ c'est-à-dire $Y = {}^tPX$, on obtient alors avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\forall X \in S,\ m(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2 \right)^2$$

et comme d'autre part ${}^tYY = {}^tXX = 1$, il vient :

$$q(X)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_n|\, y_i^2 \right)^2 = \mu_n^2$$

donc :

$$\forall X \in S,\ m(X) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 .$$

En conséquence, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in S,\ F(X, \lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2$$

ce qui prouve l'existence de :

$$\inf \left\{ F(X, \lambda) \ /\ \lambda \in \mathbb{R}, X \in S \right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 .$$

Considérons X_0 vecteur propre de A, associé à la valeur propre μ_n tel que $\|X_0\| = 1$, et $\lambda_0 = q_A(X_0)$; on a alors :

$$F(X_0, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2$$

donc cette borne inférieure est atteinte : c'est un minimum.

En conclusion :

$$\min \left\{ \operatorname{Tr}\left[\left(A - \lambda X\, {}^tX \right)^2 \right] \ /\ \lambda \in \mathbb{R}, X \in S \right\} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^2 = \operatorname{Tr} A^2 - \max_{\mu \in \operatorname{Sp} A} \mu^2.$$

Ex. 7

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont on note $N(u)$ la norme subordonnée.

1) Montrer que $N(u) = \sup \left\{ \langle u(x) \,|\, y \rangle \ /\ (x, y) \in E^2, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1 \right\}$.

En déduire $N(u) = N(u^*)$.

2) On suppose $N(u) \leqslant 1$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^* - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$.

1) Il s'agit d'une question de cours. On pourra voir à ce propos le *Précis d'algèbre et géométrie, MP*, Bréal.

2) Si $N(u) < 1$, on sait que $u - \operatorname{Id}_E$ est inversible avec :

$$\left(\operatorname{Id}_E - u \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$

(c'est encore du cours). De même, puisque $N(u^*) = N(u)$, $u^* - \mathrm{Id}_E$ est inversible et on a donc, dans ce cas :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}.$$

Supposons maintenant $N(u) = 1$.

Le cas $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ est immédiat. En effet, scachant que :

$$\mathrm{rg}\,(u^* - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\,(u - \mathrm{Id}_E)$$

on obtient aussi, avec le théorème du rang :

$$\mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$$

et donc :

$$\mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E).$$

> On peut remarquer que le cas $N(u) = 1$ avec $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$ est parfaitement possible : considérer, par exemple, une rotation de $\mathbb{R}^2$.

Il reste ainsi à étudier le cas $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ avec $\|x\| = 1$. Alors $u(x) = x$ donne :

$$\langle u(x) \mid x \rangle = \|x\|^2 = 1 \quad \text{donc} \quad \langle u^*(x) \mid x \rangle = 1$$

et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme N :

$$1 = \langle u^*(x) \mid x \rangle \leqslant \|x\|\,\|u^*(x)\| \leqslant N(u^*) = 1.$$

On obtient donc :

$$\langle u^*(x) \mid x \rangle = \|x\|\,\|u^*(x)\|$$

ce qui, d'après l'étude du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, montre que $(u^*(x), x)$ est positivement lié : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $u^*(x) = \lambda x$ (car $x \neq 0$). Alors l'égalité :

$$\langle u^*(x) \mid x \rangle = 1$$

donne $\lambda \|x\|^2 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, d'où finalement :

$$u^*(x) = x, \quad \text{soit aussi} \quad x \in \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E).$$

On a ainsi montré que :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E)$$

et, en remarquant de nouveau que $\mathrm{rg}\,(u^* - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ donne :

$$\dim \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E),$$

il vient :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \mathrm{Id}_E).$$

Ex. 8

1) Soit E un espace euclidien, montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

a) $\mathrm{Ker}\,(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$;

b) $\mathrm{Im}\,(f \circ f^*) = \mathrm{Im}\, f$.

2) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t\!AA$ et $A\,{}^t\!A$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

1) Les inclusions $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u \circ v$ et $\operatorname{Im} u \circ v \subset \operatorname{Im} u$ sont des propriétés universelles bien connues. Dans le contexte de cette question, seules les inclusions :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right)$$

sont donc utiles pour conclure. D'autre part, il est bon d'avoir à l'esprit, qu'en dimension finie, l'égalité de deux sous-espaces peut se prouver au moyen d'une inclusion et de la comparaison des dimensions.

a) Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right)$. On a alors :

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x) \,|\, f(x) \rangle = \langle x \,|\, f^* \circ f(x) \rangle = 0$$

donc $f(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f$.

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) \subset \operatorname{Ker} f$ et compte tenu de la propriété bien connue $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right)$, il vient :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) = \operatorname{Ker} f.$$

b) ▪ Première solution

L'égalité du a) nous donne aussi $\operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Ker} f^*$ donc, avec le théorème du rang et $\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$, il vient :

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) &= \dim E - \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right)\\ &= \dim E - \dim \operatorname{Ker} f^*\\ &= \operatorname{rg} f^*\\ &= \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.\end{aligned}$$

Compte tenu de $\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) \subset \operatorname{Im} f$, l'égalité des dimensions donne alors :

$$\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Im} f.$$

▪ Deuxième solution

On démontre en cours que :

$$\operatorname{Ker} f^* = \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp} \quad \text{et donc} \quad \operatorname{Im} f = \left(\operatorname{Ker} f^*\right)^{\perp}.$$

Ainsi à partir de $\operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Ker} f^*$ on obtient, en prenant les orthogonaux des deux membres :

$$\operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right)^* = \operatorname{Im} f^{**} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{Im}\left(f \circ f^*\right) = \operatorname{Im} f.$$

2) Il s'agit ici de retrouver, dans un cas particulier, le résultat classique qui donne que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique. La solution doit évidemment être adaptée au contexte particulier où $B = {}^tA$.

On suppose maintenant que E est l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormale. Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = A$ et on a alors :

$${}^tAA = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f^* \circ f \quad , \quad A\,{}^tA = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f \circ f^*.$$

Puisque ces endomorphismes sont symétriques, ils sont diagonalisables : leurs polynômes caractéristiques sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et l'ordre de multiplicité de toute valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. Le problème revient donc à prouver que :

$$\text{pour tout réel } \lambda,\ \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda \operatorname{Id}_E\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E\right).$$

Notons d'abord que, d'après le 1), $\operatorname{rg}\left(f^* \circ f\right) = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg}\left(f \circ f^*\right)$ donc :

$$\dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^*\right)$$

la propriété annoncée est vraie pour $\lambda = 0$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 0$, puisque $f^* \circ f$ et $f \circ f^*$ sont symétriques, on a alors :

$$\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E\right) \subset \left[\operatorname{Ker} f^* \circ f\right]^{\perp} = \left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$$

$$\text{et} \qquad \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda \operatorname{Id}_E\right) \subset \left[\operatorname{Ker} f \circ f^*\right]^{\perp} = \left[\operatorname{Ker} f^*\right]^{\perp} = \operatorname{Im} f$$

Or on sait que f induit un isomorphisme Φ de $\left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$, supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$, sur $\operatorname{Im} f$, on obtient donc pour tout $x \in \left[\operatorname{Ker} f\right]^{\perp}$:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E\right) &\iff f^* \circ f(x) = \lambda x \\ &\iff \Phi\left(f^* \circ f(x)\right) = \lambda\, \Phi(x) \\ &\iff f \circ f^*\left(\Phi(x)\right) = \lambda\, \Phi(x) \quad \text{car } \forall y \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}, \Phi(y) = f(y)) \\ &\iff \Phi(x) \in \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda \operatorname{Id}_E\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\Phi\left(\operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E\right)\right) = \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda \operatorname{Id}_E\right)$$

et, puisque Φ est un isomorphisme :

$$\dim \operatorname{Ker}\left(f^* \circ f - \lambda \operatorname{Id}_E\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(f \circ f^* - \lambda \operatorname{Id}_E\right).$$

Finalement, la propriété annoncée est vraie quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ex. 9

Soit A une matrice réelle symétrique positive dont les éléments non diagonaux sont strictement négatifs.

À $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on associe la matrice $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que ${}^t|X|\, A\, |X| \leqslant {}^tXAX$.

2) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ telle que $AX = 0$.

a) Montrer que tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tZA|X| = 0$.

b) Montrer que $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

c) Montrer que $\operatorname{rg} A \geqslant n - 1$.

3) Soit $\lambda_1 = \min \operatorname{Sp} A$.

a) Montrer que $\operatorname{rg}\left(A - \lambda_1 I_n\right) = n - 1$.

b) Montrer qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ telle que $AX = \lambda_1 X$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i > 0$.

1) Posons $A = [a_{ij}]$, on obtient pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$$

donc
$$^t|X|\ A\,|X| = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\,|x_i|\ |x_j|$$

et
$$^tXAX - {}^t|X|\ A\,|X| = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}\big(x_ix_j - |x_i|\ |x_j|\big)$$

Puisque chaque a_{ij}, $i \neq j$, est négatif, on en déduit :

$$^tXAX - {}^t|X|\ A\,|X| \geqslant 0.$$

2) a) Dès que l'on dispose d'une forme bilinéaire symétrique ou d'une forme quadratique positive, il est bon de se souvenir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable.

A étant positive, l'inégalité précédente s'écrit :

$$0 \leqslant {}^t|X|\ A\,|X| \leqslant {}^tXAX$$

donc $AX = 0$ donne $^t|X|\ A\,|X| = 0$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big({}^tZA\,|X|\big)^2 \leqslant \big({}^tZAZ\big)\big({}^t|X|\ A\,|X|\big)$$

donc :

$$^tZA\,|X| = 0.$$

b) La relation précédente étant vraie quelle que soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit $A\,|X| = 0$, ce qui s'écrit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii}\,|x_i| = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} a_{ij}\,|x_j|.$$

Donc, s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$, on obtient :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} a_{ij}\,|x_j| = 0$$

et, puisque les a_{ij}, $i \neq j$, sont < 0, il en résulte :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ a_{ij}\,|x_j| = 0 \ \text{ puis }\ x_j = 0$$

et finalement $X = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En conséquence, on a $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

c) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique et on note encore A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice, dans la base canonique, est A.

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 = 0$. D'après le b), on a $\operatorname{Ker} A \cap H = \{0\}$, donc :

$$\dim \operatorname{Ker} A \leqslant 1 \text{ c'est-à-dire } \operatorname{rg} A \geqslant n - 1.$$

3) a) Si on se laisse guider par l'énoncé, il est vraisemblable qu'il faut ici appliquer le résultat du 2) à la matrice $B = A - \lambda_1 I_n$ ce qui nécessite de commencer par prouver que B est positive.

On sait que A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tPAP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $X = PY$ donc $Y = {}^tPX$. On obtient alors :

$$
{}^tXX = {}^tYY \quad \text{et} \quad {}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2
$$

donc ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ c'est-à-dire ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 {}^tYY$ soit aussi ${}^tXAX \geqslant \lambda_1 {}^tXX$.

Ceci s'écrit :

$$
\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left(A - \lambda_1 I_n\right)X \geqslant 0
$$

et on a donc vérifié que la matrice symétrique réelle $B = A - \lambda I_n$ est positive.

En posant $B = \left[b_{ij}\right]$, pour $i \neq j$ on a $b_{ij} = a_{ij} < 0$, le résultat du 2) s'applique à la matrice B : on a $\operatorname{rg} B \geqslant n - 1$.

Or, puisque λ_1 est valeur propre de A, on a aussi $\operatorname{rg} B \leqslant n - 1$ d'où finalement $\operatorname{rg} B = n - 1$. Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}\left(A - \lambda_1 I_n\right)$ est donc de dimension 1.

b) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 : $Y \in \operatorname{Ker} B \setminus \left\{0\right\}$.

D'après le 2) on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i \neq 0$ et $BY = B|Y| = 0$.

Ainsi, en posant :

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |Y|,
$$

c'est-à-dire :

$$
\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = |y_i|,
$$

on a $X \neq 0$ et $\left(A - \lambda_1 I_n\right)X = 0$, donc X est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et vérifie de plus :

$$
\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = |y_i| > 0.
$$

(D) Endomorphismes symétriques positifs

Ex. 10

Soit $M = \begin{pmatrix} M_0 & {}^tM_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle positive, les blocs M_0 et M_2 étant carrés d'ordres respectifs k_0 et k_1.

Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^{k_0}$, $M_0X = 0 \ \Rightarrow\ M_1X = 0$.

Comment traduire la positivité ? au moyen des valeurs propres ou avec la forme quadratique associée ?

Il n'y a pas de lien simple entre les valeurs propres de M et les blocs M_0, M_1, M_2, il est donc plus judicieux de s'intéresser à la forme quadratique associée.

Avec $n = k_0 + k_1$, on a $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et tout $V \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$
V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^{k_0},\ Y \in \mathbb{R}^{k_1}.
$$

Soit Φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à M, le calcul donne :

$$\Phi(V) = \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 & {}^tM_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tXM_0X + {}^tYM_2Y + {}^tYM_1X + {}^tX\,{}^tM_1Y$$
$$= {}^tXM_0X + {}^tYM_2Y + 2\,{}^tYM_1X$$

Les matrices M_0 et M_2 représentent chacune une restriction de la forme quadratique Φ, elles sont donc également symétriques positives.

Supposons $M_0X = 0$, alors la positivité de Φ donne :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^{k_1}, \quad 2\,{}^tYM_1X + {}^tYM_2Y \geqslant 0$$

donc $\forall U \in \mathbb{R}^{k_1}$, tel que $\| U \| \neq 0$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$2t\,{}^tUM_1X + t^2\,{}^tUM_2U \geqslant 0 \quad \text{(où on a posé } Y = tU\text{)}$$

La matrice M_2 étant positive, on a soit ${}^tUM_2U = 0$ soit ${}^tUM_2U > 0$:

- pour ${}^tUM_2U = 0$, la condition $\forall t \in \mathbb{R}, 2t\,{}^tUM_1X \geqslant 0$ donne ${}^tUM_1X = 0$;
- pour ${}^tUM_2U > 0$, la condition $\forall t \in \mathbb{R},\ 2t\,{}^tUM_1X + t^2\,{}^tUM_2U \geqslant 0$ donne encore ${}^tUM_1X = 0$ sinon le polynôme $t \mapsto t^2\,{}^tUM_2U + 2t\,{}^tUM_1X$ aurait deux racines distinctes et prendrait donc des valeurs strictement négatives.

Finalement, on a $\forall U \in \mathbb{R}^{k_1} \setminus \{0\}$, ${}^tUM_1X = 0$ d'où $M_1X = 0$.

Ex. 11

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A symétrique définie positive : $A \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$, et B symétrique : $B \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer que AB est diagonalisable.

> A étant définie positive, c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire φ. On peut alors chercher à réduire dans le groupe orthogonal de $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ la forme quadratique de matrice B dans la base canonique.

Classiquement, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique.

Puisque $A \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}_n$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n} \varphi.$$

Soit alors Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, Q(X) = {}^tXBX$$

on a :

$$B = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n} Q.$$

Notons E l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \varphi)$, on sait qu'il existe $\mathcal{V}$ base orthonormale de E formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique de la forme quadratique Q. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}_n$ à $\mathcal{V}$:

$$P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_n} \mathcal{V} \in GL_n(\mathbb{R})$$

on a alors :

$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{V}} Q = {}^tPBP = D \quad \text{où } D \text{ est diagonale}$$

et $$\operatorname*{mat}_{\mathcal{V}} \varphi = {}^tPAP = I_n \quad \text{car } \mathcal{V} \text{ est orthonormale pour le produit scalaire } \varphi.$$

On obtient ainsi :

$$A = {}^tP^{-1}P^{-1} \ , \ A^{-1} = P\,{}^tP \ , \ B = {}^tP^{-1}DP^{-1}$$

donc $A^{-1}B = PDP^{-1}$ ce qui montre que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Il reste alors à remarquer que A^{-1} est également symétrique définie positive, et appliquer le résultat ci-dessus au couple (A^{-1}, B) pour obtenir que $(A^{-1})^{-1}B = AB$ est diagonalisable.

Ex. 12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et G un groupe fini d'automorphismes de E. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par tous les éléments de G, il existe un supplémentaire H de F qui est également stable par tous les éléments de G.

> Dans un espace euclidien si un sous-espace vectoriel F est stable par un automorphisme orthogonal u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u et $F^{\perp}$ est bien sûr un supplémentaire de F. La question sera donc résolue si nous définissons sur E une structure euclidienne telle que $G \subset \mathbb{O}(E)$.

E étant muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto x \cdot y$ choisi arbitrairement, on obtient un autre produit scalaire en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid y \rangle = \sum_{g \in G} g(x) \cdot g(y).$$

En effet, cette application $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est visiblement bilinéaire symétrique de par les propriétés de bilinéarité et symétrie du premier produit scalaire, et la linéarité des éléments g de G ; et, de plus, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\langle x \mid x \rangle = x \cdot x + \sum_{g \in G \setminus \{\mathrm{Id}_E\}} g(x) \cdot g(x) \quad \text{donc} \quad \langle x \mid x \rangle \geqslant x \cdot x > 0.$$

> On a utilisé qu'en tant que sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, G contient Id_E .

Puisque $(G, \circ)$ est un groupe, pour tout $u \in G$, l'application $g \mapsto g \circ u$ est une bijection de G sur lui-même dont la bijection réciproque est $h \mapsto h \circ u^{-1}$. En conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y) \rangle &= \sum_{g \in G} g \circ u(x) \cdot g \circ u(y) \\ &= \sum_{h \in G} h(x) \cdot h(y) \\ &= \langle x \mid y \rangle.\end{aligned}$$

Ainsi u est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ et, puisque F est stable par u, $H = F^{\perp}$ l'est également.

Finalement, H est un supplémentaire de F, stable par tous les éléments de G.

Ex. 13

Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim E = n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E. On note $\mathbb{O}(E)$ le groupe orthogonal de E.

1) Montrer que $f \circ f^* = g \circ g^*$ équivaut à l'existence de $u \in \mathbb{O}(E)$ tel que $g = f \circ u$.

2) On suppose $f \circ f^* = g \circ g^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur $\mathrm{rg} f$, existe-t-il $u \in \mathbb{O}(E)$, unique, tel que $g = f \circ u$?

1) a) Si $g = f \circ u$ avec $u \in \mathbb{O}(E)$, alors $u^* = u^{-1}$ donc :

$$g \circ g^* = f \circ u \circ u^* f^* = f \circ f^*.$$

b) Pour la réciproque, il faut construire $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $g = f \circ u$. Or un endomorphisme u de E est orthogonal si et seulement si il transforme une base orthonormale en une base orthonormale. Il parait donc plus judicieux d'introduire une base orthonormale formée de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique $f \circ f^* = g \circ g^*$.

$\varphi = f \circ f^* = g \circ g^*$ est un endomorphisme symétrique positif. Il existe donc $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base orthonormale de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \varphi = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

La base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on a :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \varphi = [\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle].$$

Or :

$$\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i \mid f \circ f^*(e_j) \rangle = \langle f^*(e_i) \mid f^*(e_j) \rangle$$

et de même :

$$\langle e_i \mid \varphi(e_j) \rangle = \langle g^*(e_i) \mid g^*(e_j) \rangle$$

donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle f^*(e_i) \mid f^*(e_j) \rangle = \langle g^*(e_i) \mid g^*(e_j) \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

On en déduit que les deux familles $(f^*(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(g^*(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont orthogonales avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \|f^*(e_i)\| = \|g^*(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$$

et il existe donc $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(e''_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ bases orthonormales de E telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'_i \quad \text{et} \quad g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e''_i.$$

Soit alors $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e''_i) = e'_i$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u^{-1}(e'_i) = u^*\left(\sqrt{\lambda_i}\, e'_i\right) = u^* \circ f^*(e_i)$$

donc $g^* = u^* \circ f^*$ puis $g = f \circ u$.

2) a) Si $\operatorname{rg} f = n$ alors f est inversible et $f \circ u = f \circ v$ donne $u = v$. Dans ce cas, le problème admet donc une solution et une seule.

b) Si $\operatorname{rg} f < n$, on a $\operatorname{rg} f \circ f^* \leqslant n - 1$ donc l'un au moins des λ_i est nul, par exemple $\lambda_n = 0$.

Alors si $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(e''_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un couple de bases orthonormales telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'_i \;\;,\;\; g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e''_i$$

en introduisant la base $(e'''_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $\forall i \in [\![1, n-1]\!], e'''_i = e''_i$ et $e'''_n = -e''_n$, on a encore :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], g^*(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e'''_i \quad \text{car } \lambda_n = 0.$$

Donc l'endomorphisme orthogonal v tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], v(e'''_i) = e'_i$$

vérifie également $g = f \circ v$. Ainsi le problème admet, dans ce cas, au moins deux solutions distinctes.

En conclusion, le problème admet une solution unique si et seulement si $\operatorname{rg} f = n$.

Noter que, moyennant l'hypothèse $f \circ f^* = g \circ g^*$, la condition $\operatorname{rg} f = n$ équivaut à $\operatorname{rg} g = n$.

Ex. 14

Soit $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $B \in S^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre $n-1$, définies-positives), $A = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tC \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$.

Montrer que S est symétrique, définie-positive.

> Quelle que soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tMM$ est symétrique, positive. C'est là un résultat bien connu et très élémentaire puisque sa justification tient à :
> $${}^t\left({}^tMM\right) = {}^tMM$$
> et :
> $$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,{}^tMMX = \| MX \|^2 \geqslant 0$$
> (on utilise la norme euclienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
> Le seul vrai problème, dans l'exercice proposé, est donc de prouver le caractère défini de la matrice S.

Montrons en premier que $S = {}^tAA$ est symétrique, définie-positive si et seulement si A est inversible.

- En supposant S définie-positive, on obtient :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX = 0 \Rightarrow X = 0$$

donc, puisque ${}^tXSX = \| AX \|^2$, cela s'écrit :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Donc A est inversible.

- En supposant A inversible, on sait déjà que S est symétrique positive, et pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $AX \neq 0$, donc :

$${}^tXSX = \| AX \|^2 > 0.$$

Ainsi S est symétrique, définie-positive.

> Pour la suite, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par isomorphisme canonique et nous convenons d'utiliser la même notation pour représenter une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé.

Le problème est ainsi ramené à prouver que $\operatorname{Ker} A$ est réduit à $\{0\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a alors :

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \begin{cases} x_1 - {}^tCY = 0 \\ x_1C + BY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = {}^tCY & (1) \\ C\,{}^tCY + BY = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), on déduit ${}^tYC\,{}^tCY + {}^tYBY = 0$, c'est-à-dire avec ${}^tCY = {}^tYC = \langle C \mid Y \rangle$ (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n-1}$) :

$$\langle C \mid Y \rangle^2 + {}^tYBY = 0 \tag{3}$$

sachant que B est positive, on a ${}^tYBY \geqslant 0$ donc (3) nous donne :

$$\langle C \mid Y \rangle = {}^tYBY = 0$$

puis, sachant que B est définie-positive, ${}^tYBY = 0$ fournit $Y = 0$ et avec (1), il vient $x_1 = 0$ donc $X = 0$.

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ donc que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ex. 15

Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif

Soit $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que pour tout $f \in S^+(E)$, il existe $g \in S^+(E)$, unique, tel que $g^2 = f$.

L'espace E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres $F_1, \dots, F_p$ de f.
Si g est solution du problème, chaque F_i est stable par g et, en notant g_i et f_i les endomorphismes de F_i induits par g et f respectivement, l'équation $g^2 = f$ se ramène aux p équations $g_i^2 = f_i$ où f_i est une homothétie.

- Envisageons d'abord le cas où f est une homothétie $x \mapsto \lambda x$.

La positivité de f se traduit par $\lambda \geqslant 0$.

Tout endomorphisme symétrique, positif, g de E est diagonalisable et ses valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont positives :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \mu_i \geqslant 0.$$

• Analyse

Supposons que $g^2 = f$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit x_i vecteur propre de g associé à la valeur propre μ_i, l'égalité $g^2(x_i) = f(x_i)$ devient $\mu_i^2 x_i = \lambda x_i$ d'où on déduit successivement $\mu_i^2 = \lambda$ (car $x_i \neq 0$), puis $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ (car $\mu_i \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$). Ainsi l'endomorphisme diagonalisable g admet une seule valeur propre : $\sqrt{\lambda}$, c'est donc l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda}\, x$.

On vient de montrer que l'équation $g^2 = f$ admet au plus une solution dans $S^+(E)$.

• Synthèse

L'homothétie $g \ : \ x \mapsto \sqrt{\lambda} x$ est un endomorphisme symétrique, positif, car $\sqrt{\lambda} \geqslant 0$ et il est évident que $g^2 = f$. C'est donc l'unique solution du problème.

- Cas général : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i, \quad F_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

La positivité de f se traduit par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

• Analyse

Supposons que $g^2 = f$ avec $g \in S^+(E)$.

On a alors $g \circ f = f \circ g = g^3$ donc chaque F_i est stable par g. Notons f_i et g_i les endomorphismes de F_i induits par f et g respectivement :

* f_i est l'homothétie $x \mapsto \lambda_i x$;
* g_i est un endomorphisme symétrique positif de F car $\forall (x, y) \in F_i$:
$$\langle g_i(x) \mid y \rangle = \langle g(x) \mid y \rangle = \langle x \mid g(y) \rangle = \langle x \mid g_i(y) \rangle$$
$$\text{et} \quad \langle g_i(x) \mid x \rangle = \langle g(x) \mid x \rangle \geqslant 0 \,;$$
* $g_i^2 = f_i$ car $\forall x \in E, g_i^2(x) = g^2(x) = f(x) = f_i(x)$.

D'après l'étude du premier cas, g_i est l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x$.

On sait qu'un endomorphisme de E est entièrement défini par ses restrictions aux sous-espaces supplémentaires $F_1, \dots, F_p$, donc l'équation $g^2 = f$ admet au plus une solution dans $S^+(E)$, il s'agit de l'endomorphisme g de E dont la restriction à chaque F_i est l'homothétie $x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x$.

• Synthèse

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], g_{|F_i} \ : \ x \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, x.$$

Dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe orthogonale :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$$

la matrice de g est :

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_p}\, I_{m_p} \end{pmatrix}$$

G est symétrique (car diagonale) positive, donc il en est de même pour g et $G^2 = \text{mat}_{\mathcal{B}} f$ donne $g^2 = f$.

En conclusion, l'équation proposée admet une solution et une seule.

Ex. 16

Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E.

Pour tout x de E, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k\,.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme, symétrique, défini-positif de E.

2) Montrer l'existence d'un endomorphisme g de E, symétrique, défini-positif, et tel que :

$$g^2 = f^{-1}.$$

3) Montrer que $\big(g(e_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E.

1) ▪ La linéarité de $x \mapsto \langle e_k \mid x \rangle$ donne celle de l'application f.

▪ La symétrie correspond à l'égalité des applications :

$$\varphi \;:\; (x, y) \mapsto \langle f(x) \mid y \rangle \quad \text{et} \quad \psi \;:\; (x, y) \mapsto \langle f(y) \mid x \rangle$$

et, puisque celles-ci sont évidemment des formes bilinéaires sur E^2, leur égalité équivaut à :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \varphi(e_i\,, e_j) = \psi(e_i\,, e_j).$$

Formons :

$$\varphi(e_i\,, e_j) = \langle f(e_i) \mid e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid e_i \rangle \langle e_k \mid e_j \rangle$$

$$\psi(e_i\,, e_j) = \langle f(e_j) \mid e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid e_j \rangle \langle e_k \mid e_i \rangle$$

l'égalité est claire et on a donc $\varphi = \psi$ c'est-à-dire que f est symétrique.

▪ La positivité est évidente puisque :

$$\forall x \in E, \langle f(x) \mid x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle^2.$$

▪ En supposant $\langle f(x) \mid x \rangle = 0$, l'expression précédente montre que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \langle e_k \mid x \rangle = 0 \quad \text{donc} \quad x \in E^{\perp}$$

et, puisque $E^{\perp} = \{0\}$, il vient $x = 0$. L'endomorphisme symétrique f est donc défini-positif.

2) f^{-1} est également symétrique défini-positif, ce qui assure l'existence et l'unicité de $g \in \mathcal{L}(E)$, symétrique, défini-positif tel que $g^2 = f^{-1}$ (voir l'exercice précédent).

3) Pour faire le lien avec les données dont on dispose, on peut penser à observer qu'une base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E est orthonormale si et seulement si :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i \mid x \rangle u_i .$$

Par définition de f, on obtient :

$$\forall x \in E, f\left(f^{-1}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid f^{-1}(x) \rangle e_k = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k \mid g^2(x) \rangle e_k$$

donc, puisque g est symétrique :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid g(x) \rangle e_k$$

puis, par linéarité de g :

$$\forall x \in E, g(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid g(x) \rangle g(e_k).$$

g étant un automorphisme de E, $y = g(x)$ décrit E et la dernière proposition se lit :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle g(e_k) \mid x \rangle g(e_k).$$

Posons :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], g(e_k) = u_k$$

puisque $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E et g un automorphisme, $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est également une base, et en écrivant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u_i = \sum_{j=1}^{n} \langle u_i \mid u_j \rangle u_j$$

on obtient :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle u_i \mid u_j \rangle = \delta_{i\,j}$$

donc cette base est orthonormale.

Ex. 17

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie-positive : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$: $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Déterminer les cas d'égalités.

2) Montrer que $\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Déterminer les cas d'égalités.

1) Pour aborder ce genre de question, on peut chercher à interpréter vectoriellement les sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$$

en utilisant que A est la matrice d'un produit scalaire.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont identifiés par isomorphisme canonique.

Puisqu'elle est symétrique, définie-positive, la matrice A définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \langle X \mid Y \rangle = {}^tXAY.$$

En notant $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i\,i} = \|e_i\|^2,\ a_{i\,\sigma(i)} = \langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle.$$

Puisque σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, il vient :

$$\sum_{i=1}^n a_{i\,i} = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \left\|e_{\sigma(i)}\right\|^2$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_{i\,i} - \sum_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\|e_i\|^2 + \left\|e_{\sigma(i)}\right\|^2 - 2\langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\|e_i - e_{\sigma(i)}\right\|^2 \geqslant 0 \qquad (i)\end{aligned}$$

et de même :

$$\sum_{i=1}^n a_{i\,i} + \sum_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\|e_i + e_{\sigma(i)}\right\|^2 \geqslant 0 \qquad (ii)$$

On a ainsi :

$$-\sum_{i=1}^n a_{i\,i} \leqslant \sum_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^n a_{i\,i}$$

c'est-à-dire :

$$\left|\sum_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^n a_{i\,i}. \qquad (1)$$

D'après (i) et (ii), l'égalité a lieu si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_{\sigma(i)} = e_i \quad \text{ou} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ e_{\sigma(i)} = -e_i\,.$$

La deuxième éventualité étant évidemment à rejeter, le seul cas d'égalité correspond à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_{\sigma(i)} = e_i \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma = \mathbf{Id}.$$

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \left|a_{i\,\sigma(i)}\right| = \left|\langle e_i \mid e_{\sigma(i)} \rangle\right| \leqslant \|e_i\|\ \left\|e_{\sigma(i)}\right\|$$

donc :

$$\prod_{i=1}^n \left|a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \prod_{i=1}^n \|e_i\| \prod_{i=1}^n \left\|e_{\sigma(i)}\right\|.$$

Or $\displaystyle\prod_{i=1}^n \left\|e_{\sigma(i)}\right\| = \prod_{i=1}^n \|e_i\|$ (car σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$) et il vient donc :

$$\prod_{i=1}^n \left|a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \prod_{i=1}^n \|e_i\|^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\prod_{i=1}^n a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \prod_{i=1}^n a_{i\,i}. \qquad (2)$$

> On peut supposer que, comme dans la première question, l'égalité n'a lieu que pour $\sigma = \mathbf{Id}$ et cela revient à montrer que l'inégalité (2) est stricte pour toute permutation $\sigma \neq \mathbf{Id}$.

Supposons $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(k) \neq k$ ce qui donne $(e_k, e_{\sigma(k)})$ libre et donc, d'après l'étude du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\left\langle e_k \,\middle|\, e_{\sigma(k)} \right\rangle\right| < \|e_k\| \, \left\|e_{\sigma(k)}\right\|$$

Envisageons alors deux possibilités :

- L'un (au moins) des $a_{i\,\sigma(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est nul. Dans ce cas il vient évidemment :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| = 0$$

et, puisque pour tout i on a $a_{ii} = \|e_i\|^2 > 0$, cela nous donne :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i\,\sigma(i)}$ est non nul. On dispose alors des inégalités :

$$0 < \left|a_{k\,\sigma(k)}\right| < \|e_k\| \, \left\|e_{\sigma(k)}\right\|$$

et $$\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\},\ 0 < \left|a_{i\,\sigma(i)}\right| \leqslant \|e_i\| \, \left\|e_{\sigma(i)}\right\|$$

ce qui donne donc :

$$0 < \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} \|e_i\| \prod_{i=1}^{n} \left\|e_{\sigma(i)}\right\|$$

soit aussi :

$$0 < \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\right| < \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

En conséquence, pour $\sigma \neq \mathrm{Id}$, l'inégalité (2) est stricte, et donc (2) se réduit à une égalité si et seulement si $\sigma = \mathrm{Id}$.

Ex. 18

1) Montrer que la forme quadratique Q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$Q(x, y, z) = y^2 + 3x^2 - 2zx + 3z^2$$

est définie-positive.

2) Déterminer l'image de l'application :

$$F \ : \ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \frac{2y^2 - x^2 + zx}{y^2 + 3x^2 - 2zx + 3z^2}.$$

1) Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ et une forme quadratique Q sur E, sachant que la forme polaire d'une forme quadratique définie-positive est un produit scalaire et que, pour tout produit scalaire, il existe des bases de E orthonormales, on retrouve le résultat usuel suivant.

Q est définie-positive si et seulement si il existe $e_1, \ldots, e_n$ formes linéaires sur E, indépendantes, et telles que :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2.$$

En observant la symétrie en (x, z), on obtient facilement :

$$3x^2 - 2zx + 3z^2 = (x+z)^2 + 2(x-z)^2$$

donc :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(x, y, z) = y^2 + (x+z)^2 + 2(x-z)^2.$$

Il est alors clair que Q est positive et définie car :

$$Q(x, y, z) = 0 \text{ donne } y = 0,\ x + z = 0,\ x - z = 0 \text{ donc } x = y = z = 0.$$

2) Il semble impératif de simplifier le dénominateur.

Le seul fait de se placer dans une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale par rapport à Q va nous donner une telle simplification.

Soit Φ la forme polaire de Q. On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne associée à ce produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ \langle u \mid v \rangle = \Phi(u, v),\ \| u \|^2 = Q(u).$$

Une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ est orthonormale (pour cette structure) si et seulement si pour tout $u = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$, $\| u \|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, donc en posant :

$$x' = x + z \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = \sqrt{2}(x - z),$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{1}{2}\left(x' + z'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = \frac{1}{2}\left(x' - z'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

on obtient les formules de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à une base orthonormale (e_1', e_2', e_3'). Dans cette base, on a :

$$F(u) = \frac{2y'^2 - \dfrac{z'^2}{4} - x'z'\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Alors on sait qu'il existe une base orthonormale (e_1'', e_2'', e_3'') dans laquelle la forme quadratique :

$$N \ :\ u \mapsto 2y'^2 - \frac{z'^2}{4} - x'z'\frac{\sqrt{2}}{4}$$

s'écrit :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ N(u) = \lambda x''^2 + \mu y''^2 + \nu z''^2$$

où on a posé $u = x''e_1'' + y''e_2'' + z''e_3''$.

Les scalaires λ, μ, ν sont les valeurs propres de :

$$A = \underset{(e_1', e_2', e_3')}{\mathrm{mat}}\, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{8} & 0 & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et, avec $\det(A - XI_3) = (2 - X)\left(X + \dfrac{1+\sqrt{3}}{8}\right)\left(X + \dfrac{1-\sqrt{3}}{8}\right)$, on peut choisir :

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}+1}{8} \quad , \quad \mu = 2 \quad , \quad \nu = \frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

Dans la base $(e_i'')_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ on a donc :

$$F(u) = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}x''^2 + 2y''^2 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{8}z''^2}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Avec $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{8} < \dfrac{\sqrt{3}-1}{8} < 2$, on obtient :

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{8}\left(x''^2+y''^2+z''^2\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}+1}{8}x''^2+2y''^2+\frac{\sqrt{3}-1}{8}z''^2 \leqslant 2\left(x''^2+y''^2+z''^2\right)$$

donc pour tout $u \neq 0$:

$$-\frac{\sqrt{3}+1}{8} \leqslant F(u) \leqslant 2.$$

En remarquant que $F\left(e_1''\right) = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$ et $F\left(e_2''\right) = 2$, on en conclut que :

$$\max_{u\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} F(u) = 2 \quad \text{et} \quad \min_{u\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} F(u) = -\frac{\sqrt{3}+1}{8}$$

puis, comme F est continue et $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, $F\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\right)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et finalement :

$$F\left(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{8}, 2\right].$$

Ex. 19

Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle, définie-positive écrite par blocs, les blocs A_1 et A_2 étant carrés. Montrer que :

$$\det A \leqslant \det A_1 \det A_2 .$$

> Pour obtenir des informations sur le déterminant de A en fonction de ceux de A_1 et A_2, il paraît nécessaire de réduire A par blocs. En particulier, si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, définie-positive, c'est la matrice d'un produit scalaire, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :
>
> $${}^tPAP = I_n .$$

Par hypothèse, on a $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles définies-positives), $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ avec $p + q = n$.

Notons d'abord que A_1 et A_2 sont symétriques, définies-positives.

En effet, si $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q$ où q est une forme quadratique définie-positive. Alors, en posant :

$$F = \mathrm{Vect}\left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left(e_i\right)_{p+1\leqslant i\leqslant n}$$

A_1 est la matrice par rapport à $\mathcal{B}_F = \left(e_i\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de la restriction q_F de q à F et A_2 est la matrice par rapport $\mathcal{B}_G = \left(e_i\right)_{p+1\leqslant i\leqslant n}$ de la restriction q_G de q à G. Le caractère défini positif de q se transmettant évidemment aux restrictions q_F et q_G, on obtient que A_1 et A_2 sont symétriques, définies-positives.

En conséquence, il existe $P_1 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $P_2 \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tP_1A_1P_1 = I_p \quad \text{et} \quad {}^tP_2A_2P_2 = I_q .$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} {}^tP_1 & 0 \\ 0 & {}^tP_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tP_1A_1P_1 & {}^tP_1BP_2 \\ {}^tP_2\,{}^tBP_1 & {}^tP_2A_2P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ {}^tB_1 & I_q \end{pmatrix}$$

où on a posé :

$$B_1 = {}^tP_1BP_2 .$$

Avec $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ on a :

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix})$$

et l'identité $A' = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ {}^tB_1 & I_q \end{pmatrix} = {}^tPAP$ montre que A' est également symétrique définie-positive :

$$A' \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

En effet, A et A' sont congruentes, elles représentent donc la même forme quadratique q. Plus précisément, si $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$ alors $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\, q$.

Posons alors $V = \begin{pmatrix} I_p & -B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, on a $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (avec $V^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$), et on obtient :

$$A'' = {}^tVA'V = \begin{pmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q - {}^tB_1B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -B_1 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q - {}^tB_1B_1 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, de $A'' = {}^tVA'V$ on déduit que $A'' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, puis que :

$$I_q - {}^tB_1B_1 \in S_q^{++}(\mathbb{R}).$$

Il est bien connu que ${}^tB_1B_1 \in S_q^{+}(\mathbb{R})$ (en effet, en utilisant la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^q$ identifié à $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, on a $\forall X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\,{}^tB_1B_1X = \|B_1X\|^2 \geqslant 0$), donc ${}^tB_1B_1$ est orthogonalement semblable à :

$$\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_q\right) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1, q]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

Alors $I_q - {}^tB_1B_1$ est orthogonalement semblable à $\mathrm{diag}\left(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_q\right)$ et puisque cette matrice $I_q - {}^tB_1B_1$ est définie-positive, on a $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $1 - \lambda_i > 0$ d'où finalement :

$$\forall i \in [\![1, q]\!], 0 \leqslant \lambda_i < 1 \ \text{ et } \ 0 < 1 - \lambda_i \leqslant 1.$$

On en déduit :

$$\det A'' = \prod_{i=1}^{q} 1 - \lambda_i \in \left]0, 1\right]$$

or $\det A'' = \det A' = \det A \cdot (\det P)^2$, c'est-à-dire :

$$\det A'' = \det A \cdot \left(\det P_1\right)^2 \left(\det P_2\right)^2 = \frac{\det A}{\det A_1\ \det A_2},$$

donc $\det A'' \leqslant 1$ donne :

$$\det A \leqslant \det A_1\ \det A_2.$$

Ex. 20

Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ et $B = \left[b_{ij}\right]_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ deux matrices symétriques réelles, définies-positives.

On pose $A_1 = \left[a_{ij}\right]_{2 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ et $B_1 = \left[b_{ij}\right]_{2 \leqslant i,\, j \leqslant n}$.

1) Montrer que :

$$\frac{\det(A+B)}{\det\left(A_1 + B_1\right)} \geqslant \frac{\det A}{\det A_1} + \frac{\det B}{\det B_1}.$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

1) Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $e = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, les matrices A et B sont associées à des formes quadratiques q_A et q_B définies-positives. On a alors :

$$A + B = \mathrm{mat}_e\left(q_A + q_B\right)$$

et comme il est clair que la forme quadratique $q_A + q_B$ est définie-positive, il en est de même pour la matrice $A + B$. Ainsi :

$$A, B, A + B \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

De même, les restrictions $q_{A,1}$ et $q_{B,1}$ de q_A et q_B à $F = \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_n)$ sont des formes quadratiques définies-positives ainsi que leur somme $q_{A,1}+q_{B,1}$, leurs matrices A_1, B_1 et A_1+B_1 par rapport à la base $(e_i)_{2\leq i\leq n}$ sont donc également définies-positives, c'est-à-dire que :

$$A_1, B_1, A_1 + B_1 \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R}).$$

▪ Remarquons d'abord qu'une réduction par congruence de A_1 permet d'effectuer une réduction par blocs de A.

En considérant une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPA_1P = D$, avec D diagonale, et en écrivant :

$$A = \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$, $L_A \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, on obtient :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & L'_A \\ {}^tL'_A & D \end{bmatrix}$$

où on a posé $L'_A = L_AP$, puis en utilisant que D est inversible (tout comme A_1), et que ${}^tD^{-1} = D^{-1}$:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -L'_AD^{-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & L'_A \\ {}^tL'_A & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}\,{}^tL'_A & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Ainsi avec $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -D^{-1}L'_A & I_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $W = UV$, on a :

$${}^tWAW = A'' : A \text{ est congruente à la diagonale } A''.$$

Avec $\det U = \det P$ et $\det V = 1$, il en résulte en particulier :

$$\det A'' = (\det P)^2 \det A$$

c'est-à-dire :

$$\det A = \left(a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A\right) \frac{\det D}{(\det P)^2} = \left(a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A\right) \det A_1$$

ou encore :

$$\frac{\det A}{\det A_1} = a - L'_AD^{-1}\,{}^tL'_A.$$

▪ En second lieu, remarquons que puisque A_1 est définie-positive, A_1 et B_1 sont simultanément congruentes à I_{n-1} et à une diagonale D c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tPA_1P = I_{n-1} \quad \text{et} \quad {}^tPB_1P = D = \mathrm{diag}\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

donc :

$${}^tP\left(A_1 + B_1\right)P = \Delta = \mathrm{diag}\,\left(1 + \beta_1, 1 + \beta_2, \ldots, 1 + \beta_n\right).$$

On pose $A = \begin{bmatrix} a & L_A \\ {}^tL_A & A_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b & L_B \\ {}^tL_B & B_1 \end{bmatrix}$, ce qui donne :

$$A + B = \begin{bmatrix} a + b & L_A + L_B \\ {}^tL_A + {}^tL_B & A_1 + B_1 \end{bmatrix}$$

puis, avec $L'_A = L_AP$, $L'_B = L_BP$ et $L'_A + L'_B = \left(L_A + L_B\right)P$, le calcul du premier point donne :

$$\frac{\det A}{\det A_1} = a - L'_A\,{}^tL'_A$$

$$\frac{\det B}{\det B_1} = b - L'_BD^{-1}L'_B$$

$$\frac{\det(A + B)}{\det\left(A_1 + B_1\right)} = a + b - \left(L'_A + L'_B\right)\Delta^{-1}\,{}^t\left(L'_A + L'_B\right).$$

Posons maintenant $L'_A = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $L'_B = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, on obtient :

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)} - \frac{\det A}{\det A_1} - \frac{\det B}{\det B_1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\beta_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i+y_i)^2}{1+\beta_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{1+\beta_i} x_i^2 + \frac{1}{\beta_i(1+\beta_i)} y_i^2 - \frac{2x_i y_i}{1+\beta_i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\beta_i} \left(x_i\sqrt{\beta_i} - \frac{y_i}{\sqrt{\beta_i}} \right)^2$$

Remarquer que les β_i sont strictement positifs puisque, par hypothèse, B_1 est définie-positive.

La conclusion en résulte :

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_1+B_1)} - \frac{\det A}{\det A_1} - \frac{\det B}{\det B_1} \geqslant 0.$$

2) Le calcul précédent montre que les cas d'égalités correspondent à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \beta_i x_i \quad \text{c'est-à-dire à} \quad {}^tL'_B = D\,{}^tL'_A.$$

Avec $L'_A = L_A P$, $L'_B = L_B P$ et $D = {}^tPB_1P$, cette condition équivaut à :

$${}^tL_B = B_1 P\,{}^tP\,{}^tL_A$$

soit encore, puisque $A_1^{-1} = P\,{}^tP$, à :

$$B_1^{-1}\,{}^tL_B = A_1^{-1}\,{}^tL_A.$$

Ex. 21

Soit A et B des matrices symétriques réelles définies-positives :

$$(A, B) \in S_n^{+*}(\mathbb{R})^2,$$

α et β des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.

Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Lorsque l'on dispose de deux matrices symétriques réelles, l'une étant définie-positive, il est souvent intéressant d'observer qu'elles sont simultanément congruentes à I_n et à une diagonale.

Notons $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisqu'elle est symétrique, réelle, définie-positive, A est la matrice par rapport à e d'un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ et nous notons E l'espace euclidien ainsi défini : $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$.

Dans un tel espace, il existe au moins une base orthonormale $\varepsilon = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ donc, en posant $U = \operatorname{mat}_e \varepsilon$ on a :

$$\operatorname{mat}_\varepsilon \varphi = I_n = {}^tUAU \quad \text{avec} \quad U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Posons alors $B_1 = {}^tUBU$. Il est immédiat que B_1 est encore symétrique réelle (${}^tB_1 = B_1$) définie-positive car $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ donne $UX \neq 0$ et donc :

$${}^tXB_1X = {}^t(UX)B(UX) > 0.$$

Alors on sait qu'il existe $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$V^{-1}B_1V = {}^tVB_1V = D$$

où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant les valeurs propres de B_1.

Remarquer que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas les valeurs propres de B sauf si U est orthogonale, c'est-à-dire si $A = I_n$.

On obtient donc :

$$^t(UV)A(UV) = I_n \quad \text{et} \quad ^t(UV)B(UV) = D$$

soit aussi :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP \quad \text{avec} \quad P = (UV)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

En conséquence :

$$\det A = (\det P)^2, \ \det B = (\det P)^2 \cdot \det D$$

et, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det\left(\alpha I_n + \beta D\right) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta\lambda_i).$$

La fonction ℓn étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, sachant que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont strictement positifs (car B_1 est définie-positive), pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$, on a :

$$\ell n(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \alpha\, \ell n\, 1 + \beta\, \ell n\, \lambda_i$$

donc :

$$\alpha + \beta\, \lambda_i \geqslant \lambda_i^{\beta}$$

puis :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\beta}.$$

Avec $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det D = \frac{\det B}{(\det P)^2} = \frac{\det B}{\det A}$, il vient finalement :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^{1-\beta}(\det B)^{\beta}$$

c'est-à-dire

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^{\alpha}(\det B)^{\beta}.$$

Ex. 22

Soit A, B des matrices symétriques réelles positives d'ordre n :

$$(A, B) \in S_n^+(\mathbb{R})^2.$$

Montrer que :

$$\left(\det(A + B)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \qquad (i)$$

Dans le cas particulier où l'une des deux matrices A ou B est définie-positive, elles sont simultanément congruentes à I_n et à une matrice diagonale.

Dans le cas général, on peut observer que toute matrice symétrique, réelle positive, est limite d'une suite de matrices symétriques, réelles, définies-positives.

- Supposons l'une des deux matrices, par exemple A, définie-positive. Alors comme dans l'exercice précédent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPDP \quad \text{avec } D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$$

où les λ_i sont positifs ou nuls.

On en déduit :

$$\det A = (\det P)^2, \ \det B = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

et avec $A + B = {}^tP\left(I_n + D\right)P$:

$$\det(A+B) = (\det P)^2 \det\left(I_n + D\right) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda_i\right).$$

Puisque $(\det P)^2 > 0$, l'inégalité (i) annoncée est alors équivalente à :

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{n}}. \qquad (ii)$$

Si l'un des λ_i est nul, (ii) est vraie donc (i) l'est également.

On suppose maintenant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$, alors (ii) équivaut à :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell n\left(1+\lambda_i\right) \geqslant \ell n\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ell n\,\lambda_i}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell n\left(1+e^{\ell n\,\lambda_i}\right) \geqslant \ell n\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ell n\,\lambda_i}\right) \qquad (iii)$$

> L'inégalité (iii) ressemble fort à une inégalité de convexité.

Introduisons la fonction $f : x \mapsto \ell n\left(1+e^x\right)$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ et pour toute famille $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ de réels, on a :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)$$

c'est-à-dire :

$$\ell n\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell n\left(1+e^{x_i}\right).$$

Il suffit alors de substituer $\ell n\,\lambda_i$ à chaque x_i pour obtenir (iii), et, par équivalence, on en déduit que (i) est vraie.

- Si aucune des deux matrices n'est définie-positive, considérons la suite $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$A_k = A + \frac{1}{k}I_n.$$

Il est immédiat que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ et que chaque A_k est symétrique réelle et définie-positive car pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0\right\}$, on a :

$${}^tXA_kX = {}^tXAX + \frac{1}{k}\,{}^tXX \geqslant \frac{1}{k}\|X\|^2 > 0.$$

> $X \mapsto \left({}^tXX\right)^{\frac{1}{2}}$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après la première partie, on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(\det\left(A_k + B\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\det A_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\det B\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\det A_k\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (iv)$$

Étant donné que l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \det\left(A_k + B\right) = \det(A+B) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \det A_k = \det A = 0,$$

et puisque $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est continue en 0, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\det\left(A_k + B\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \det(A+B)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \left(\det A_k\right)^{\frac{1}{n}} = (\det A)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

En passant à la limite dans (iv) on obtient donc :

$$\left(\det(A+B)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$$

c'est-à-dire :

$$\left(\det(A+B)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

Ex. 23

On note E l'espace des matrices symétriques réelles de taille n : $E = S_n(\mathbb{R})$.

1) Pour $(A, B) \in E^2$, on pose $A \leqslant B$ si et seulement si la matrice $B - A$ est positive. A-t-on défini une relation d'ordre ?

2) Montrer que, dans E, toute suite croissante, majorée au sens de $\leqslant$, converge.

1)

> Pour caractériser la positivité d'une matrice symétrique réelle, on peut utiliser ses valeurs propres ou une forme quadratique associée. En général, on ne dispose pas de lien simple entre les valeurs propres de A et B et celles de $A - B$. Alors que si A et B sont les matrices respectives de formes quadratiques q_A et q_B, dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on a $A - B = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\left(q_A - q_B\right)$.
>
> La seconde méthode de caractérisation des matrices symétriques réelles positives parait donc être ici la plus judicieuse.
>
> Rapppelons, de plus, qu'une relation d'ordre est une relation binaire, réflexive, anti-symétrique et transitive.

Étant donné $A \in E$, notons q_A la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A, c'est-à-dire que $A = \underset{\mathcal{B}_n}{\mathrm{mat}}\, q_A$ où $\mathcal{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors A est positive si et seulement si q_A est positive et la relation $A \leqslant B$ se traduit par $q_B - q_A \geqslant 0$.

La forme quadratique nulle est positive donc, pour tout $A \in E$, $q_A - q_A \geqslant 0$, c'est-à-dire $A \leqslant A$. La relation $\leqslant$ est réflexive.

Soit A et B dans E telles que $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$. On a alors $q_A \leqslant q_B$ et $q_B \leqslant q_A$ donc $q_A = q_B$ puis $A = B$. La relation $\leqslant$ est antisymétrique.

Enfin, soit A, B et C dans E telles que $A \leqslant B$ et $B \leqslant C$. De $q_A \leqslant q_B$ et $q_B \leqslant q_C$, on déduit $q_A \leqslant q_C$ donc $A \leqslant C$. La relation $\leqslant$ est transitive.

2) Soit $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de E, majorée par $M \in E$. On note $q_p = q_{A_p}$.

> $\left(q_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles dont on va commencer par étudier la convergence simple.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $q_{p+1}(X) \geqslant q_p(X)$ car $A_p \leqslant A_{p+1}$ donne $q_p \leqslant q_{p+1}$, et $q_p(X) \leqslant q_M(X)$ car $A_p \leqslant M$ donne $q_p \leqslant q_M$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la suite réelle $\left(q_p(X)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc elle converge et on pose :

$$q(X) = \lim_{p\to+\infty} q_p(X).$$

La fonction $q\ :\ X \mapsto \lim\limits_{p\to+\infty} q_p(X)$ est limite simple sur $\mathbb{R}^n$ de la suite $\left(q_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Montrons maintenant que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, soit B_p la forme polaire de q_p :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ B_p(X, Y) = {}^tXA_pY = \frac{1}{4}\left(q_p(X+Y) - q_p(X-Y)\right).$$

Puisque $\left(q_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^n$ vers q, on obtient :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \lim_{p\to+\infty} B_p(X, Y) = \frac{1}{4}\left(q(X+Y) - q(X-Y)\right),$$

ce qui prouve la convergence simple sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la suite d'applications $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ vers :

$$B\ :\ (X, Y) \mapsto \frac{1}{4}\left(q(X+Y) - q(X-Y)\right).$$

Par passage à la limite, B hérite de la symétrie et de la bilinéarité des B_p. De même $q_p(X) = B_p(X, X)$ donne, à la limite, $q(X) = B(X, X)$. Ainsi q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire B. On notera Q sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous allons maintenant montrer que $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers Q.

> Pour donner un sens à la notion de suite convergente dans E, il faut munir cet espace d'une norme, autant que possible bien adaptée au problème, et le cours nous en fournit une. En effet, dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique (par exemple) pour tout endomorphisme f, en notant S la sphère unité, on a :
>
> $$|||f||| = \sup_{(X,Y)\in S^2} \left\langle f(X) \mid Y \right\rangle$$
>
> et, si u est un endomorphisme symétrique positif :
>
> $$|||u||| = \sup_{X\in S} \left\langle u(X) \mid X \right\rangle = \max \mathrm{Sp}(u).$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous notons f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé. On obtient alors une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant pour toute matrice A :

$$\|A\| = |||f_A||| = \sup_{X\in S} \|f_A(X)\|.$$

D'après la remarque précédente, on a aussi :

$$\|A\| = \sup_{(X,Y)\in S^2} {}^tYAX$$

et, lorsque A est symétrique positive :

$$\|A\| = \sup_{X\in S} \|AX\| = \sup_{X\in S} {}^tXAX = \|q_A\|_\infty^S = \sup \mathrm{Sp}(A).$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la suite $\left(q_p(X)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite $q(X)$, en conséquence on a $q(X) - q_p(X) \geqslant 0$. Ainsi, $\left(q - q_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de formes quadratiques positives qui converge simplement vers la forme nulle sur $\mathbb{R}^n$ et les matrices $Q - A_p$ sont symétriques réelles, positives.

Pour la suite, nous posons :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \varphi_p = q - q_p,\ \Phi_p = Q - A_p,\ \lambda_p = \max \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right)$$

et soit $U_p \in S$ un vecteur propre unitaire de Φ_p associé à λ_p.

Avec ces notations, nous obtenons :

$$\|\Phi_p\| = \varphi_p(U_p) = \lambda_p .$$

Remarquons alors que la suite $\left(\varphi_p\left(U_p\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En effet, $\varphi_{p+1} \leqslant \varphi_p$ donne $\varphi_{p+1}(U_{p+1}) \leqslant \varphi_p(U_{p+1})$ et $\varphi_p(U_p) = \sup\limits_{X\in S} \varphi_p(X)$ donne $\varphi_p(U_{p+1}) \leqslant \varphi_p(U_p)$ donc :

$$\varphi_{p+1}(U_{p+1}) \leqslant \varphi_p(U_p).$$

Étant donné qu'il s'agit d'une suite réelle positive, on en déduit qu'elle est convergente.

Observons maintenant que, puisque la sphère S est un compact sur $\mathbb{R}^n$, de la suite $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite $(U_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans S. Posons $V = \lim\limits_{k\to+\infty} U_{p_k}$.

En écrivant pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi_p(X) - \varphi_p(Y) &= {}^tX\,\Phi_p\,X - {}^tY\,\Phi_p\,Y = {}^tX\,\Phi_p\,(X-Y) + {}^t(X-Y)\,\Phi_p\,Y\\ &= \left\langle X \,\middle|\, \Phi_p(X-Y)\right\rangle + \left\langle X - Y \,\middle|\, \Phi_p(Y)\right\rangle\end{aligned}$$

on obtient, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\varphi_p(X) - \varphi_p(Y)| = \|X\|\,\|\Phi_p(X-Y)\| + \|X-Y\|\,\|\Phi_p(Y)\|,$$

et puisque $\|\Phi_p(X-Y)\| \leqslant \|\Phi_p\|\,\|X-Y\|$ et $\|\Phi_p(Y)\| \leqslant \|\Phi_p\|\,\|Y\|$, il vient :

$$|\varphi_p(X) - \varphi_p(Y)| \leqslant 2\,\|\Phi_p\|\,\|X-Y\|.$$

Sachant que la suite $(\|\Phi_p\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, on a quel que soit $p \in \mathbb{N}$:

$$\|\Phi_p\| \leqslant \|\Phi_0\| = \lambda_0 ,$$

donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\varphi_p(X) - \varphi_p(Y)| \leqslant 2\,\lambda_0\,\|X-Y\|$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\varphi_{p_k}(U_{p_k}) - \varphi_{p_k}(V)\right| \leqslant 2\,\lambda_0\,\|U_{p_k} - V\|$$

et donc :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\varphi_{p_k}(U_{p_k}) - \varphi_{p_k}(V)\right) = 0.$$

Or la convergence simple sur $\mathbb{R}^n$ de la suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vers la forme quadratique nulle donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_{p_k}(V) = 0$, d'où finalement :

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_{p_k}(U_{p_k}) = 0.$$

Puisque la suite $\left(\varphi_{p_k}(U_{p_k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $\left(\varphi_p(U_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$, ces deux suites ont la même limite et enfin :

$$\lim_{p\to+\infty} \varphi_p(U_p) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{p\to+\infty} \|Q - A_p\| = 0.$$

On a ainsi prouvé que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers Q dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

E Coniques

Ex. 24

Déterminer l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les sommets décrivent une parabole $\mathcal{P}$.

> Le centre du triangle équilatéral est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ce triangle et les sommets apparaissent alors comme les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

De façon à respecter la symétrie des rôles joués par ces trois sommets, on peut donc procéder comme suit :

1) écrire un paramétrage rationnel d'un cercle $\mathscr{C}$;

2) écrire l'équation aux paramètres des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$;

3) écrire la condition pour que les racines de cette équation représentent les sommets d'un triangle équilatéral.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $\mathscr{P}$ ait pour équation :

$$y^2 - 2px = 0.$$

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega = (a, b)$ et de rayon R est paramétré par :

$$x = a + R\cos\theta, \quad y = b + R\sin\theta, \quad \theta \in \left[0, 2\pi\right],$$

soit aussi, en posant $u = e^{i\theta}$ et $c = \dfrac{R}{2}$, par :

$$x = a + c\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad y = b - ic\left(u - \frac{1}{u}\right), \quad u \in \mathbb{U}.$$

Rappelons que $\mathbb{U}$ est la notation usuelle du cercle unité de $\mathbb{C}$.

Écrivons l'équation aux paramètres de l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$:

$$2p\left[a + c\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] - \left[b - ic\left(u - \frac{1}{u}\right)\right]^2 = 0$$

c'est-à-dire $Q(u) = 0$ où on a posé :

$$Q(u) = c^2u^4 + 2c(p + ib)u^3 + \left(2pa - b^2 - 2c^2\right)u^2 + 2c(p - ib)u + c^2.$$

Pour que $\mathscr{P} \cap \mathscr{C}$ contienne les sommets d'un triangle équilatéral, il faut et il suffit que Q admette trois racines de la forme $\alpha, j\alpha, j^2\alpha$, donc que Q soit divisible par $u^3 - \alpha^3$, avec $\alpha \in \mathbb{U}$.

La division euclidienne de Q par $u^3 - \alpha^3$ s'écrit :

$$Q(u) = \left(u^3 - \alpha^3\right)\left(c^2u + 2ibc + 2pc\right) + R(u)$$

où $R(u) = \left(2pa - b^2 - 2c^2\right) + \left[\alpha^3 c^2 + 2c(p - ib)\right]u + c^2 + 2\,\alpha^3 c(p + ib)$.

La condition $u^3 - \alpha^3$ divise $Q(u)$ s'écrit donc :

$$\begin{cases} 2pa - b^2 - 2c^2 = 0 \\ \alpha^3 c + 2(p - ib) = 0 \\ c + 2\,\alpha^3\,(p + ib) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2pa - b^2 - 2c^2 = 0 & (1) \\ c^2 - 4\left(p^2 + b^2\right) = 0 & (2) \\ \alpha^3 c + 2(p - ib) = 0 & (3) \end{cases}$$

Une condition nécessaire apparaît alors clairement avec (1) et (2) :

$$2pa - b^2 - 8\left(p^2 + b^2\right) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad b^2 = \frac{2p}{9}(a - 4p) \tag{4}$$

Réciproquement, on suppose (4) vérifiée.

Soit alors $c \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$c = 2\,|p - ib| \quad \text{donc} \quad c^2 = 4\left(p^2 + b^2\right)$$

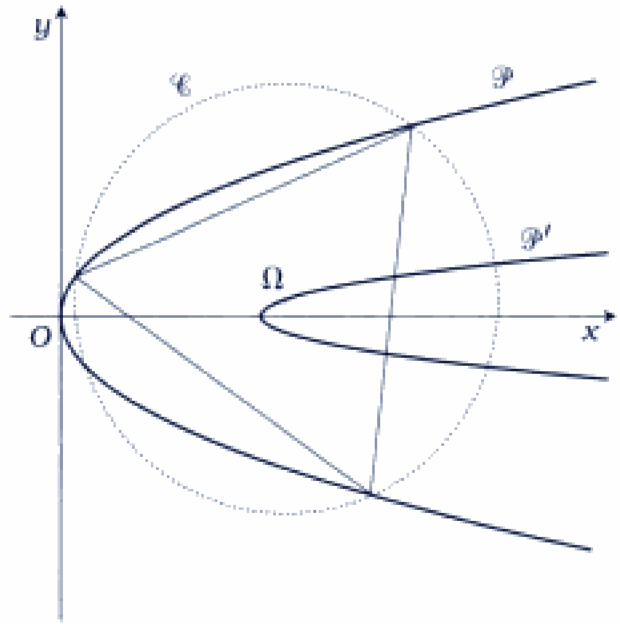
puis $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que :

$$\alpha^3 c = -2(p - ib).$$

On a ainsi retrouvé (2) et (3) et, compte tenu de (4), avec (2), on obtient (1).

En conclusion, l'ensemble cherché est la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation :

$$y^2 = \frac{2p}{9}(x - 4p).$$



Ex. 25

Discuter, suivant la valeur du paramètre réel λ, la nature de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ donnée, dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, par l'équation :

$$(1+\lambda)\left(x^2+y^2\right)+2(1-\lambda)xy-4\,\lambda\,y+1=0.$$

On précisera, quand il y a lieu, les foyer(s), centre et asymptote(s).

Notons q_λ la partie quadratique de l'équation :

$$\forall \overrightarrow{V}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j},\, q_\lambda\left(\overrightarrow{V}\right)=(1+\lambda)\left(x^2+y^2\right)+2(1-\lambda)xy$$

et soit A_λ la matrice de q_λ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$A_\lambda=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$\det A_\lambda=(1+\lambda)^2-(1-\lambda)^2=4\lambda$$

donc, pour $\lambda=0$, on a affaire à une courbe du genre parabole, tandis que pour $\lambda\neq 0$, il s'agit d'une conique à centre.

- Premier cas : $\lambda=0$

L'équation de $\mathscr{C}_0$ s'écrit :

$$x^2+y^2+2xy+1=0$$

c'est-à-dire $(x+y)^2+1=0$, et, en fait, $\mathscr{C}_0=\varnothing$.

- Deuxième cas : $\lambda\neq 0$

En posant :

$$f_\lambda(x,y)=(1+\lambda)\left(x^2+y^2\right)+2(1-\lambda)xy-4\,\lambda\,y+1,$$

le centre de symétrie $\Omega\left(x_0, y_0\right)$ est défini par $\operatorname{grad} f_\lambda\left(x_0, y_0\right)=0$, c'est-à-dire par :

$$A_\lambda\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\lambda\end{pmatrix}$$

et on en déduit :

$$x_0=\frac{\lambda-1}{2}\quad,\quad y_0=\frac{\lambda+1}{2}.$$

Par translation des axes :

$$x = x_0 + x' \quad , \quad y = y_0 + y'$$

on obtient l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, appelée équation au centre :

$$\mathscr{C}_\lambda : (1 + \lambda)(x'^2 + y'^2) + 2(1 - \lambda)x'y' = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Observons alors que $q(x', y') = q(y', x')$. Il en résulte que les bissectrices du repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont axes de symétrie de $\mathscr{C}_\lambda$ et nous opérons donc une rotation de la base, d'angle $\pi/4$. Soit :

$$\vec{I} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{J} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, $\mathscr{C}_\lambda$ a pour équation :

$$(1 + \lambda)(X^2 + Y^2) + (1 - \lambda)(X^2 - Y^2) = \lambda^2 + \lambda - 1$$

c'est-à-dire :

$$2X^2 + 2\lambda Y^2 = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

On a en effet :

$$x'^2 + y'^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2 = X^2 + Y^2$$

et les formules de changement de base qui s'écrivent :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$$

donnent :

$$2x'y' = X^2 - Y^2.$$

> On remarquera que le fait d'observer la symétrie de q_λ donne les axes de symétrie de $\mathscr{C}_\lambda$ et dispense donc d'avoir à les rechercher en réduisant la matrice A_λ.

On peut maintenant achever la discussion.

- Pour $0 < \lambda < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 < 0$ donc $\mathscr{C}_\lambda = \varnothing$.
- Pour $\lambda = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, l'équation se réduit à $X^2 + \lambda Y^2 = 0$ et $\mathscr{C}_\lambda = \{\Omega\}$.
- Pour $\lambda > \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, on a $\lambda^2 + \lambda - 1 > 0$ et $\mathscr{C}_\lambda$ est une ellipse d'équation :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{2\lambda}}.$$

Donc l'axe focal est $(\Omega, \vec{J})$ si $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} < \lambda < 1$, les foyers étant :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \lambda - 1)(1 - \lambda)}{2\lambda}}\,\vec{J}$$

et lorsque $\lambda > 1$, cet axe focal devient $(\Omega, \vec{I})$ et les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \lambda - 1)(\lambda - 1)}{2\lambda}}\,\vec{I}.$$

Pour $\lambda = 1$, $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $\Omega(x_0 = 0, y_0 = 1)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

■ Pour $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \lambda < 0$, on a $\lambda^2+\lambda-1<0$ donc $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole d'équation :

$$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{avec} \quad a=\sqrt{\frac{1-\lambda-\lambda^2}{2}} \text{ et } b=\sqrt{\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2\lambda}}.$$

L'axe focal est $(\Omega, \overrightarrow{J})$ et les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2+\lambda-1)(1-\lambda)}{2\lambda}}\overrightarrow{J}.$$

Les asymptotes ont pour équations : $X=\pm\sqrt{-\lambda}Y$.

■ Pour $\lambda=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathscr{C}_\lambda$ se décompose en les deux droites d'équations :

$$X=\pm\sqrt{-\lambda}Y.$$

■ Pour $\lambda < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a $\lambda^2+\lambda-1>0$ donc $\mathscr{C}_\lambda$ est encore une hyperbole, mais l'équation réduite s'écrit maintenant :

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \text{avec} \quad a=\sqrt{\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2}} \text{ et } b=\sqrt{\frac{1-\lambda-\lambda^2}{2\lambda}}.$$

L'axe focal est $(\Omega, \overrightarrow{I})$, les foyers :

$$\Omega \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2+\lambda-1)(\lambda-1)}{2\lambda}}\overrightarrow{I}$$

et les asymptotes ont encore pour équations :

$$X=\pm\sqrt{-\lambda}Y.$$

Ex. 26

On donne deux points A et B, distincts, du plan euclidien.

Déterminer le lieu des points M tels que les bissectrices de $(\widehat{MA, MB})$ aient des directions fixes.

L'essentiel est bien sûr de choisir un «bon» repère.

A et B jouent des rôles symétriques et l'énoncé introduit deux directions fixes orthogonales.

Choisissons donc pour repère orthonormal, $\mathscr{R}=(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $O=\frac{A+B}{2}$, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ définissant ces deux directions fixes imposées.

Avec les identifications usuelles, on a alors :

$$A=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix} a-x \\ a-y \end{pmatrix}.$$

Pour que le vecteur $\overrightarrow{i}$ dirige l'une des deux bissectrices de $(\widehat{MA, MB})$), il faut et il suffit que l'image de $\overrightarrow{MA}$ dans la réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{i})$ soit colinéaire à $\overrightarrow{MB}$.

Ainsi une équation du lieu (Γ) cherché est :

$$\begin{vmatrix} a-x & x+a \\ y-b & y+b \end{vmatrix}=0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad xy=ba.$$

Γ est donc une hyperbole équilatère passant par A et B, centrée au milieu de $[A, B]$, dont les asymptotes sont dirigées par les directions fixes définies par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Ex. 27

Étant donné $a > 0$, dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la famille de coniques $(\Gamma_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ d'équations :

$$x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta) = a^2 \sin^2 \theta \qquad \Gamma_\theta$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets et l'ensemble $\mathcal{F}$ des foyers des Γ_θ, $\theta \in \mathbb{R}$.

> Comme dans tout exercice de géométrie, il est bon de restreindre le problème en tenant compte des symétries de la figure.

En remarquant que $\Gamma_{\theta+\pi} = \Gamma_\theta$ pour tout θ, on obtient que :

$$(\Gamma_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}} = (\Gamma_\theta)_{\theta \in [\alpha, \alpha+\pi]}.$$

D'autre part, on observe que Γ_θ et $\Gamma_{-\theta}$ sont images, l'une de l'autre, dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ (ou $(O, \vec{j})$). En conséquence, si $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des sommets, et $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des foyers, des Γ_θ, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on aura :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

où $\mathcal{S}_2$ (resp. $\mathcal{F}_2$) est l'image de S_1 (resp. $\mathcal{F}_1$) dans la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ (ou $(O, \vec{j})$).

Remarquons enfin que l'équation de Γ_0 est $y^2 = 0$: Γ_0 se réduit à une droite (Ox) comptée deux fois. En conséquence, on se limite maintenant à $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

> Le point O est évidemment centre de symétrie de Γ_θ. Il nous suffit donc, pour préciser les sommets et foyers, de déterminer les directions propres de l'endomorphisme symétrique f_q de la partie quadratique de l'équation.

Posons :

$$\forall \vec{M} = x\vec{i} + y\vec{i},\ q(\vec{M}) = x^2 \sin^2 \theta - xy \sin 2\theta + y^2(1 + \cos^2 \theta).$$

La matrice de cette forme quadratique dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & 1 + \cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

> Puisque la base est orthonormale, A est aussi la matrice, par rapport à $(\vec{i}, \vec{j})$, de f_q endomorphisme symétrique de la forme quadratique q.

On obtient $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \sin^2 \theta$ d'où les valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1 - \cos\theta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 + \cos\theta.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, ces valeurs propres sont confondues. Mais l'équation devient :

$$\Gamma_{\frac{\pi}{2}} : x^2 + y^2 = a^2.$$

On reconnait alors un cercle dont tous les points sont des sommets et dont les foyers sont confondus avec O.

Supposons maintenant $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

On a alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et les sous-espaces propres sont deux droites orthogonales.

Ker $\left(f_q - \lambda_1 \operatorname{Id}\right)$, d'équation $-x_1 \sin\theta + (1+\cos\theta)x_2 = 0$ est dirigée par :

$$\vec{u} = \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{y},$$

donc Ker $\left(f_q - \lambda_2 \operatorname{Id}\right)$ est dirigée par :

$$\vec{v} = -\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{j},$$

image de $\vec{u}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, en posant pour tout M, $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$, Γ_θ a pour équation :

$$(1-\cos\theta)X^2 + (1+\cos\theta)Y^2 = a^2\sin^2\theta$$

soit aussi :

$$\frac{X^2}{2a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{Y^2}{2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1.$$

- Les sommets sont donc définis par :

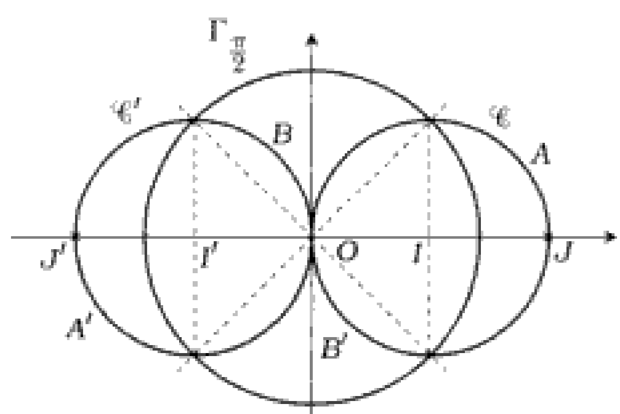
$$A = O + a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u}, \qquad A' = O - a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u},$$
$$B = O + a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{v}, \qquad B' = O - a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{v},$$

soit, en coordonnées polaires d'axes $(O, \vec{i})$ par :

$$A\ :\ r = a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2}, \qquad A'\ :\ r = a\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} + \pi\,;$$
$$B\ :\ r = a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad B'\ :\ r = a\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad \omega = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, chacun des points A et B' décrit un arc du cercle $\mathscr{C}$ d'équation polaire $r = a\sqrt{2}\cos\omega$: A décrit l'arc correspondant à $0 < \omega < \pi/4$ et B' l'arc correspondant à $-\pi/2 < \omega < -\pi/4$. De même, chacun des points A' et B décrit un arc du cercle $\mathscr{C}'$ d'équation polaire $r = -a\sqrt{2}\cos\omega$: A' décrit l'arc correspondant à $\pi < \omega < (3\pi)/4$ et B l'arc correspondant à $\pi/2 < \omega < (3\pi)/4$.

On obtient l'ensemble $\mathscr{S}$ en ajoutant à ces arcs leurs images par la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$ et le cercle $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.



Finalement, $\mathscr{S}$ est la réunion des trois cercles, $\mathscr{C}$ (de centre $I = (a, 0)$, de rayon a), $\mathscr{C}'$ (de centre $I' = (-a, 0)$, de rayon a) et $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ (de centre O, de rayon $a\sqrt{2}$), privée des trois points :

$$O,\ J = \left(a\sqrt{2}, 0\right) \text{ et } J' = \left(-a\sqrt{2}, 0\right).$$

- Pour préciser les foyers, on remarque d'abord que, pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et donc :

$$\cos\frac{\theta}{2} > \sin\frac{\theta}{2}$$

ce qui donne que l'axe focal de l'ellipse Γ_θ est $(O, \overrightarrow{u})$, ainsi les foyers sont :

$$F = O + a\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}\,\overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad F' = -F,$$

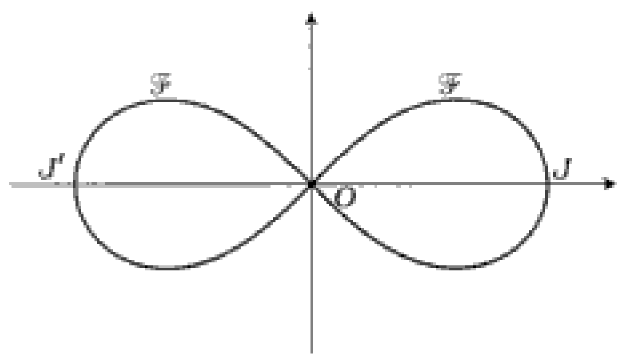
c'est-à-dire que F et F' ont pour coordonnées polaires respectives :

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta},\ \omega = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad r = -a\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta},\ \omega = \frac{\theta}{2} \quad \text{avec} \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{4}.$$

En complétant avec la réflexion d'axe $(0, \overrightarrow{i})$, il vient finalement que $\mathcal{F}$ est la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire :

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\omega}$$

privée de ses points d'intersection avec $(O, \overrightarrow{i})$.



(F) Quadriques

Ex. 28

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8xy - 2yz - 2zx + 4x - 8y + 4z = 0.$$

1) Former une équation réduite et préciser la nature de $\mathcal{S}$.

2) Déterminer les génératrices de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1) Introduisons la forme quadratique :

$$q \;:\; x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \mapsto 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8xy - 2yz - 2zx,$$

sa matrice A dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

et la forme linéaire :

$$\ell \;:\; x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \mapsto 4x - 8y + 4z.$$

Les valeurs propres de A sont $-3, 0, 6$ et ses sous-espaces propres :

$$\operatorname{Ker}(A+3I) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker}(A-6I) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Dans le repère orthonormal $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, avec :

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$\mathcal{S}$ a pour équation :

$$-3x'^2 + 6z'^2 + \ell(\overrightarrow{I})x' + \ell(\overrightarrow{J})y' + \ell(\overrightarrow{K})z' = 0$$

c'est-à-dire :

$$-3x'^2 + 6z'^2 - 2\sqrt{6}y' - 6\sqrt{2}z' = 0.$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$-3x'^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\sqrt{6}\left(y' + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

donc, dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ tel que $\Omega = 0 - \frac{\sqrt{6}}{4}\overrightarrow{J} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{K}$, on obtient l'équation réduite :

$$6Z^2 - 3X^2 = 2\sqrt{6}Y.$$

En conséquence, $\mathcal{S}$ est un paraboloïde hyperbolique.

> Noter que la nature de $\mathcal{S}$ est connue dès que l'on sait que $\ell(\overrightarrow{J}) \neq 0$.
>
> Pour la préciser, il n'est donc pas utile de calculer $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{K}$.

2) Posons $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = x'\,\overrightarrow{I} + y'\,\overrightarrow{J} + z'\,\overrightarrow{K}$.

L'expression :

$$q(\overrightarrow{u}) = 6z'^2 - 3x'^2$$

montre que q peut se décomposer en produit de deux formes linéaires indépendantes.

Écrivons donc :

$$q(\overrightarrow{u}) = 2x^2 + 2y^2 - 8xy - (z^2 + 2zx + 2zy),$$

avec $z^2 + 2zx + 2zy = (z+x+y)^2 - (x+y)^2$, on obtient :

$$q(\overrightarrow{u}) = 3x^2 + 3y^2 - 6xy - (x+y+z)^2 = 3(x-y)^2 - (x+y+z)^2$$

soit encore :

$$q(\overrightarrow{u}) = \Big(x(\sqrt{3}-1) - y(\sqrt{3}+1) - z\Big)\Big(x(\sqrt{3}+1) - y(\sqrt{3}-1) + z\Big).$$

Donc l'équation de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\Big(x(\sqrt{3}-1) - y(\sqrt{3}+1) - z\Big)\Big(x(\sqrt{3}+1) - y(\sqrt{3}-1) + z\Big) = -4x + 8y - 4z$$

et les deux systèmes de génératrices sont définis par :

$$D_\lambda \ : \begin{cases} x(\sqrt{3}-1) - y(\sqrt{3}+1) - z = \lambda \\ \lambda\Big[x(\sqrt{3}+1) - y(\sqrt{3}-1) + z\Big] = -4x + 8y - 4z \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$D'_\mu \ : \begin{cases} x(\sqrt{3}+1) - y(\sqrt{3}-1) + z = \mu \\ \mu\Big[x(\sqrt{3}-1) - y(\sqrt{3}+1) - z\Big] = -4x + 8y - 4z \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Ex. 29

Soit $\mathscr{C}$ le cône d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dans un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et P le plan :

$$ux + vy + wz = 0.$$

Caractériser P pour que l'intersection $P \cap \mathscr{C}$ soit la réunion de deux droites orthogonales.

Introduisons la forme quadratique :

$$q\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

sa forme polaire φ, le vecteur unitaire :

$$\vec{K} = \frac{u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

et une base orthonormale $\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ de E.

Dans le repère $\mathscr{R}' = \left(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$, l'intersection $P \cap \mathscr{C}$ a pour équation :

$$q\left(\vec{I}\right)X^2 + 2\varphi\left(\vec{I}, \vec{J}\right)XY + q\left(\vec{J}\right)Y^2 = 0, Z = 0,$$

elle est formée de deux droites orthogonales si et seulement si $q\left(\vec{I}\right) + q\left(\vec{J}\right) = 0$.
En effet, la courbe du second degré $\mathscr{P} \cap \mathscr{C}$ est du genre hyperbole équilatère si et seulement si elle a une équation de la forme :

$$X^2 - Y^2 = k$$

donc si et seulement si $\operatorname{Tr} A = 0$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} q\left(\vec{I}\right) & \varphi\left(\vec{I}, \vec{J}\right) \\ \varphi\left(\vec{I}, \vec{J}\right) & q\left(\vec{J}\right) \end{bmatrix}.$$

> Une courbe du second degré décomposée en deux droites sécantes est du genre hyperbole et, lorsque ces droites sont orthogonales, on a affaire au genre hyperbole équilatère.

Or par invariance de la trace, on a $q\left(\vec{I}\right) + q\left(\vec{J}\right) + q\left(\vec{K}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$, d'où la condition nécessaire et suffisante :

$$q\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right) = \left(u^2 + v^2 + w^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Les plans $P : ux + vy + wz = 0$ solutions du problème sont donc caractérisés par :

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)u^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)w^2 = 0,$$

c'est-à-dire que ce sont les plans passant par O et orthogonaux aux génératrices du cône $\mathscr{C}'$ d'équation :

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

Pour qu'un tel plan existe, il faut que $c^2 \leqslant \sup(a^2, b^2)$, (condition pour que $\mathscr{C}'$ ne soit pas réduit à $\{0\}$).

Ex. 30

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tout point M de coordonnées (x, y, z), on pose :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1) Soit $\mathscr{C}$ le cône du second degré d'équation ${}^t VAV = 0$.

Montrer que $\mathscr{C}$ a trois génératrices, deux à deux orthogonales, si et seulement si $\operatorname{Tr} A = 0$.

2) Soit l'ellipsoïde $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener à $\mathscr{E}$ trois tangentes deux à deux orthogonales.

1) Notons q la forme quadratique de matrice A :

$$q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- La condition est nécessaire.

Si $(O, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est un repère orthonormal construit sur trois génératrices, deux à deux orthogonales, du cône $\mathscr{C}$, on a :

$$q(\vec{i'}) = q(\vec{j'}) = q(\vec{k'}) = 0,$$

donc la matrice $A' = {}^t PAP$ de q dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ a une diagonale nulle et, dans le nouveau repère, $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$\mathscr{C} \ : \ \lambda y'z' + \mu z'x' + \gamma x'y' = 0.$$

Or A est semblable à A' car la matrice de passage P est orthogonale, donc :

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A' = 0.$$

- La condition est suffisante.

Suivons la démarche inverse. Supposons que, dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation du cône est déjà réduite :

$$\mathscr{C} \ : \ \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \ , \ \ A = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma) \ \text{ et } \ \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Considérons un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où $\vec{K} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ sans préciser $\vec{I}, \vec{J}$.

On a alors $q(\vec{K}) = \dfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

Puisque $P = \operatorname{mat}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, la matrice de q dans $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est :

$$A' = {}^t PAP = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & 0 \end{pmatrix} \ \text{ avec } \ \operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr} A = a + a' = 0.$$

La section de $\mathscr{C}$ par le plan $(O, \vec{I}, \vec{J})$ a donc pour équation :

$$Z = 0 \ , \ \ aX^2 + 2b''XY + a'Y^2 = 0$$

Il s'agit de la réunion de deux droites orthogonales, elles forment avec $(O, \overrightarrow{K})$ trois génératrices de $\mathscr{C}$, deux à deux orthogonales.

En fait, tout plan orthogonal à une génératrice recoupe $\mathscr{C}$ en deux droites orthogonales ou en une hyperbole équilatère.

2) Si $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ est un point de l'ensemble cherché, le cône $\mathscr{C}$ de sommet Ω circonscrit à $\mathscr{E}$ possède trois génératrices deux à deux orthogonales. La question 1) permet de conclure.

Soit $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, notons $\overrightarrow{\Omega P} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$ et écrivons l'équation en λ de l'intersection $\mathscr{E} \cap (\Omega P)$. La droite (ΩP) étant paramétrée par :

$$\lambda \mapsto M = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega P} : \left(x_0 + \lambda X, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda Z\right),$$

le point $M(\lambda)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$\lambda^2\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) + 2\lambda\left(\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} + \frac{z_0 Z}{c^2}\right) + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0$$

La droite (ΩP) est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si cette équation a une racine double :

$$\left(\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} + \frac{z_0 Z}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Il s'agit là de l'équation dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ du cône $\mathscr{C}$ de sommet Ω circonscrit à $\mathscr{E}$.

On reconnaît une forme quadratique attachée à une matrice A :

$$\mathscr{C} : (X\ Y\ Z)A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0.$$

D'après le 1), l'ensemble des points Ω, d'où l'on peut mener à $\mathscr{E}$ trois tangentes deux à deux orthogonales, a pour équation :

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

Il s'agit d'un ellipsoïde ayant les mêmes axes que $\mathscr{E}$.

Ex. 31

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, trouver les plans qui coupent l'ellipsoïde :

$$\mathscr{E} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

suivant un cercle. Préciser l'ensemble des centres de ces cercles.

Remarquons que l'équation de $\mathscr{E}$ s'écrit :

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(z^2 - x^2\right) - 1 = 0 \qquad .$$

> Il est alors immédiat que, pour obtenir une équation de cercle (réel ou non), il suffit de poser $z \pm x = \lambda$.

Soit P_λ le plan d'équation $z - x = \lambda$. Alors $\mathscr{E} \cap P_\lambda = \mathscr{S}_\lambda \cap P_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est la sphère d'équation :

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \lambda(z + x) - 1 = 0.$$

Si l'intersection est réelle, c'est un cercle noté $\mathscr{C}_\lambda$, dont la projection sur xOy est :

$$E_\lambda : x^2 + 2y^2 + 3(x + \lambda)^2 = 1 \ \text{ ou } \ \left(2x + \frac{3\lambda}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1 - \frac{3\lambda^2}{4}.$$

Ainsi le plan $P_\lambda : z - x = \lambda$ coupe $\mathscr{E}$ suivant un cercle lorsque $|\lambda| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Le centre étant :

$$\Omega_\lambda = \left(-\frac{3\lambda}{4}, O, \frac{\lambda}{4}\right),$$

il décrit un segment.

L'ellipsoïde $\mathscr{E}$ est invariant dans la réflexion de plan yOz, on a donc un résultat analogue pour les plans $P'_\lambda : z + x = \lambda$, les centres des cercles décrivant maintenant le segment image du précédent dans cette réflexion.

Montrons que nous avons ainsi épuisé toutes les possibilités.

Soit $P : ax + by + cz = d$ un plan coupant $\mathscr{E}$ suivant un cercle. Dans un nouveau repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, tel que $\overrightarrow{K}$ soit orthogonal à P, on obtient pour équation de $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} \ : \ 2\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) + \left(\alpha X + \beta Y + \gamma Z\right)\left(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z\right) = 1.$$

où $\left(\alpha X + \beta Y + \gamma Z\right)\left(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z\right) = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ (produit de formes linéaires).

De plus, avec :

$$\overrightarrow{K} = \frac{a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

P a maintenant pour équation $Z = \delta$ où on a posé $\delta = \dfrac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Pour que la section de $\mathscr{E}$ par le plan $P(Z = \delta)$ soit un cercle, il faut que l'on ait :

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' \ \text{ et } \ \alpha\,\beta' + \beta\,\alpha' = 0.$$

Supposons $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et regardons les équations précédentes comme un système linéaire homogène en $\left(\alpha', \beta'\right)$. Le déterminant de ce système est égal à $\alpha^2 + \beta^2$, il est donc différent de 0 et le système donne $\alpha' = \beta' = 0$.

Ainsi une condition nécessaire pour que $\mathscr{E} \cap P$ soit un cercle est $\alpha = \beta = 0$ ou $\alpha' = \beta' = 0$.

Géométriquement, cette condition s'interprète par le fait que $\overrightarrow{K}$ est orthogonal à l'un des deux plans de la famille d'équation $(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$ dans le nouveau repère, et $(z - x)(z + x)$ dans le repère initial.

Une condition nécessaire, pour avoir une section circulaire, est donc que la direction du plan P ait pour équation $z + x = 0$ ou $z - x = 0$

On a vu précédemment que cette cette condition est suffisante et que les plans d'équations $z \pm x = \lambda$ coupant $\mathscr{E}$ suivant un cercle réel sont ceux pour lesquels :

$$|\lambda| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Thèmes d'étude - Problèmes

1 Résolution approchée de systèmes linéaires Pseudo-solutions

Notations

- $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- pour $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$, $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$: $a_{i,j}$ est l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j ;
- à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$ on associe $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$;
- à $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$, on associe Φ_A application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est A ;
- si $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ et $y = \left(y_1, \ldots, y_n\right)$, on note :

$$\left\langle x \,\middle|\, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

En remarquant que :

$$^{t}X \cdot Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

et en identifiant cette matrice $(1,1)$ avec son unique coefficient, on notera aussi :

$$\left\langle x \,\middle|\, y \right\rangle = {}^{t}X \cdot Y \;;$$

- si $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, on note $\| x \| = \| X \| = \sqrt{\left\langle x \,\middle|\, x \right\rangle}$;
- à $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$ on associe :

$$\|\Phi_A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^p\\ x\neq 0}} \frac{\|\Phi_A(x)\|}{\|x\|} \;; \quad \text{(ou matriciellement : } |||A||| = \sup_{\substack{X\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,1)\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}\text{)}.$$

Partie A

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, A est inversible.

1) Soit X $\left(X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)\right)$ l'unique solution de $AX = B$ $\left(B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1), B \neq 0\right)$.

Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant |||A|||\ \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} \quad \text{et que} \quad |||A|||\ \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \geqslant 1. \tag{1}$$

On notera dans toute la suite $\mu(A) = |||A|||\ \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right|$.

2) On pose $A' = {}^tA \cdot A$.

a) Montrer que les valeurs propres de A' sont réelles, strictement positives, et qu'il existe P orthogonale et D diagonale tel que $D = P^{-1}A'P$.

b) Les valeurs propres de A' étant notées $(\lambda'_i)_{1 \leq i \leq n}$ et rangées dans l'ordre croissant $(0 < \lambda'_1 \leq \ldots \leq \lambda'_n)$, montrer que pour tout Y dans $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$:

$$\| AY \| \leq \sqrt{\lambda'_n} \| Y \|, \text{ et qu'il existe } Y_0 \text{ tel que } \|AY_0\| = \sqrt{\lambda'_n}\, \|Y_0\|.$$

En déduire : $|||A|||$.

c) Montrer que ${}^tA \cdot A$ et $A \cdot {}^tA$ ont le même polynôme caractéristique. En remplaçant A par A^{-1} dans b), en déduire $|||A^{-1}|||$, et enfin : $\mu(A) = \sqrt{\dfrac{\lambda'_n}{\lambda'_1}}$.

3) a) On suppose A orthogonale. Calculer $\mu(A)$.

b) On suppose A symétrique. Exprimer $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

c) *Application numérique.*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mu(A)$, et déterminer ΔB (avec par exemple $\| \Delta B \| = 1$) de façon que :

$$\frac{\| \Delta X \|}{\| X \|} = \mu(A) \frac{\| \Delta B \|}{\| B \|}$$

(ce qui prouve que l'inégalité (1) ne peut pas être améliorée dans le cas général).

Partie B

Notations : $\begin{cases} \text{si } X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1) & \text{on pose } \| X \| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{si } A \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n) & \text{on pose } |||A||| = \displaystyle\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1) \\ X \neq 0}} \frac{\| AX \|}{\| X \|} \end{cases}$

1) a) Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$. On suppose que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |m_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |m_{ij}|.$$

Montrer qu'il n'existe aucun $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$ tel que $X \neq 0$ et $MX = 0$. En déduire que M est inversible.

b) Soit $N \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$. On pose :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq n, \; R_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |n_{ij}|, \;\; D(n_{ii}, R_i) = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; |z - n_{ii}| \leq R_i \},$$

$$\text{et } G_N = \bigcup_{i=1}^{n} D(n_{ii}, R_i).$$

Montrer que les valeurs propres de N (réelles ou complexes) appartiennent toutes à G_N.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$. On appelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M (réelles ou complexes), et on pose :

$$\rho(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|.$$

a) Montrer que si $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$, alors $\rho(M) < 1$.

b) Montrer que, si M est diagonalisable et $\rho(M) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = 0$.

c) On se propose de démontrer le résultat précédent sans l'hypothèse «M diagonalisable». Le polynôme caractéristique de M étant écrit sous la forme :

$$P_M(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \left(\lambda - \lambda_i' \right)^{r_i}$$

(les λ_i' étant les valeurs propres distinctes de M et les r_i leurs ordres de multiplicité respectifs), *on admet* qu'il existe $M' \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$, $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$ vérifiant :

P inversible ;

$M' = P^{-1}MP$;

$$M' = \begin{pmatrix} M_1' & & & (0) \\ & M_2' & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_p' \end{pmatrix}$$

avec : $\forall i \in [\![1, p]\!]$: $M_i' \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\left(r_i, r_i\right)$, $M_i' = \left(\lambda_i' \right)$ si $r_i = 1$ et $M_i' = \lambda_i' I_{r_i} + J_{r_i}$ si $r_i \geqslant 2$

$$\left(\text{où } I_{r_i} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J_{r_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},\right.$$

c'est-à-dire $J_{r_i} = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r_i}$, avec $a_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r_i - 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$).

Calculer $J_{r_i}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, en déduire que :

$$J_{r_i}^{r_i} = 0,\ \|J_{r_i}\| \leqslant 1, \text{ et } \left\|M_i'^k\right\| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n} C_k^{\alpha} \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha} \text{ si } k \geqslant n.$$

Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} M_i'^k = 0$ et, en remarquant que :

$$\left\|M'^k\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \left\|M_i'^k\right\|,$$

en déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} M'^k$ et enfin $\lim\limits_{k \to +\infty} M^k$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$. On suppose que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left|a_{ij}\right|.$$

On pose $A = D + G$, où $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $G = A - D$.

a) Vérifier que A est inversible, que D est inversible, et que l'équation $AX = B$ est équivalente à :

$$X = A'X + B', \quad \text{où } A' = -D^{-1}G \text{ et } B' = D^{-1}B.$$

b) Montrer que $\rho(A') < 1$, en déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} A'^k$.

c) Soit L l'unique solution de $AX = B$. On définit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$X_0 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \ X_{k+1} = A'X_k + B'$$

En étudiant $(X_k - L)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Partie C

Dans cette partie : $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$, et on suppose qu'il n'existe aucune matrice X ($X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,1)$) telle que :

$$AX = B. \tag{2}$$

On appelle pseudo-solution de (2) toute matrice X_0 ($X_0 \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,1)$) telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX - B\|, X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p,1)\right\}$$

(ce que l'on peut écrire également :

$$\left\|\Phi_A(x_0) - b\right\| = \mathrm{d}\left(b, \operatorname{Im}\Phi_A\right), \text{ en posant } \mathrm{d}\left(b, \operatorname{Im}\Phi_A\right) = \inf\left\{\|\Phi_A(x) - b\|, x \in \mathbb{R}^p\right\}).$$

1) a) En étudiant la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, démontrer l'existence de pseudo-solutions de (2).

b) On suppose de plus Φ_A injective. Montrer que (2) admet alors une pseudo-solution x_0 *unique*.

c) Montrer que :

$$\begin{aligned} x \text{ pseudo-solution de (2)} &\iff \left[\forall y \in \mathbb{R}^p,\ \left\langle \Phi_A(y) \,\middle|\, \Phi_A(x) - b\right\rangle = 0\right] \\ &\iff \left[{}^tAAX = {}^tAB\right]. \end{aligned}$$

2) *Application.*

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne n points $M_k(x_k, y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. On définit, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $H_k(x_k, ax_k + b)$ et on se propose de déterminer $\mathcal{D}$ de façon que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|\overrightarrow{M_kH_k}\right\|^2 \text{ soit minimum.}$$

Montrer que ce problème revient à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $AX = B$, où A, B, X sont trois matrices que l'on explicitera.

À quelle condition, sur $(M_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, Φ_A est-elle injective ? Déterminer alors *la* pseudo-solution de $AX = B$.

3) *Généralisation.*

Soit C une partie de $\mathbb{R}^p$. On suppose C non vide, $C \neq \mathbb{R}^p$, $\Phi_A(C)$ partie fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$. On recherche les pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in \mathbb{C}$.

a) Montrer l'existence d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\Phi_A(x_k) - b\right\| = \mathrm{d}\left(b, \Phi_A(C)\right).$$

b) Montrer que $\left(\Phi_A(x_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

c) En déduire l'existence de pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in \mathbb{C}$.

Solution

Partie A

1) $AA^{-1} = I_n$ donne $1 = |||I_n||| \leqslant |||A||| |||A^{-1}|||$, et $AX = B$ donne $|||A||| \| X \| \geqslant \| B \|$, donc :

$$\frac{1}{|||A||| \| X \|} \leqslant \frac{1}{\| B \|} \quad (i) \quad (\text{on a } X = A^{-1}B \neq 0).$$

D'autre part, $A\,\Delta\,X = \Delta B$ donc :

$$\Delta X = A^{-1}\,\Delta\,B \quad \text{et} \quad \|\,\Delta\,X\| \leqslant |||A^{-1}||| \|\,\Delta\,B\| \qquad (ii).$$

En combinant (i) et (ii), il vient :

$$\frac{\|\,\Delta\,X\|}{\|X\|} \leqslant |||A||| |||A^{-1}||| \frac{\|\,\Delta\,B\|}{\|B\|}.$$

2) a) A' est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles et A' est diagonalisable dans le groupe orthogonal : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D diagonale : $D = P^{-1}A'P = {}^tPA'P$

Soit λ' une valeur propre de A' et X un vecteur propre associé : $A'X = \lambda' X$ et $X \neq 0$, alors :

$${}^tXA'X = \lambda' \| X \|^2 \quad \text{mais aussi} \quad {}^tXA'X = {}^tX\,{}^tAAX = \| AX \|^2$$

donc :

$$\lambda' = \frac{\| AX \|^2}{\| X \|^2} > 0.$$

(A étant inversible, $X \neq 0$ donne $AX \neq 0$).

b) ▪ Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\| AY \|^2 = {}^t(AY)AY = {}^tYA'Y = {}^tYPD\,{}^tPY = {}^tZDZ \quad \text{avec} \quad Z = {}^tPY,$$

donc :

$$\| AY \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'^2 z_i^2 \leqslant \lambda_n'^2 \| Z \|^2$$

or $\| Z \|^2 = {}^tZZ = {}^tYY = \| Y \|^2$, d'où finalement :

$$\| AY \| \leqslant \sqrt{\lambda_n'} \| Y \| \qquad (iii)$$

▪ Pour Y_0 vecteur propre de A' associé à λ_n', on a :

$$\| AY_0 \|^2 = \lambda_n' \| Y_0 \|^2 \qquad (iv)$$

▪ De (iii) et (iv), on déduit $|||A||| = \sqrt{\lambda_n'}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det\left({}^tAA - \lambda I_n\right) = \det\left[\left({}^tA - \lambda A^{-1}\right)A\right] = \det\left[A\left({}^tA - \lambda A^{-1}\right)\right] = \det\left(A\,{}^tA - \lambda I_n\right).$$

On en déduit :

$$\operatorname{Sp}\left(A\,{}^tA\right)^{-1} = \operatorname{Sp} A'^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda_n'}, \frac{1}{\lambda_{n-1}'}, \ldots, \frac{1}{\lambda_1'}\right\}$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{Sp}\left({}^tA^{-1}A^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda_n'}, \ldots, \frac{1}{\lambda_1'}\right\}$$

et d'après b) :

$$|||A^{-1}||| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1'}}.$$

D'où :

$$\mu(A) = \sqrt{\frac{\lambda'_n}{\lambda'_1}}.$$

3) a) Si A est orthogonale, on a $A' = {}^tAA = I_n$ donc $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n = 1$ et $\mu(A) = 1$.

b) Si A est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Posons $\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, l'indexation étant choisie telle que $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots \leqslant |\lambda_n|$.
On sait, de plus, qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, d'où :

$$Q^{-1}A'Q = Q^{-1}A^2Q = (Q^{-1}AQ)^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Ainsi :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda'_i = \lambda_i^2 \quad \text{et} \quad \mu(A) = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|.$$

c) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $A' = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Sp} A' = \{1, 4\}$, $\mu(A) = 2$;

$$B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \ , \ \|B\| = 2\sqrt{3} \ , \ \|X\| = \sqrt{3}.$$

Pour $\Delta B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $\|\Delta B\| = 1$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 1$, on peut poser $x = \cos\theta, y = \sin\theta$.
La condition :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A)\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$

se lit alors :

$$\|\Delta X\| = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|A^{-1}\Delta B\| = 1$$

ou encore :

$$\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin^2\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cos\theta = 1 \ \text{ soit } \ 2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = 0$$

soit enfin :

$$(\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta)^2 = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \theta = -\operatorname{Arctan}\sqrt{2} \pmod{\pi}$$

($\operatorname{Arctan}\sqrt{2} = 54,74^0$ à 5.10^{-3} près). D'où :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sin\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Partie B

1) a) Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$, $X \neq 0$, $MX = 0$.

$MX = 0$ donne $\forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j = 0.$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, $X \neq 0$ donne $|x_{i_0}| > 0$.

De $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i_0j}x_j = 0$ on déduit $m_{i_0i_0} = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n} m_{i_0j}\frac{x_j}{x_{i_0}}$ et donc $|m_{i_0i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n} |m_{i_0j}|$ (car $\left|\dfrac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leqslant 1$)

Ainsi, par contraposition, on obtient que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |m_{ij}| \text{ implique qu'il n'existe aucun } X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1),\ X \neq 0 \text{ et } MX = 0.$$

En conséquence, on a $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ et M est inversible.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N, $N - \lambda I_n$ est alors non inversible donc, d'après a), il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$|n_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |n_{ij}|$$

c'est-à-dire qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda \in D(n_{ii}, R_i)$ ou encore $\lambda \in G_N$.

2) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n,1)$ vecteur propre de M associé à $\lambda \in \mathbb{C}$ où λ est une valeur propre telle que $|\lambda| = \rho(M)$.

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k X = \lambda^k X$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$ donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda^k X = 0$.

Puisque $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), il en résulte $|\lambda| < 1$ donc $\rho(M) < 1$.

b) M étant diagonalisable, il exite $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n) P^{-1}$, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad M^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) P^{-1}$$

$\rho(M) < 1$ donne $\forall i \in [\![1,n]\!], |\lambda_i| < 1$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_i^k = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k = 0$

c) $1 \leqslant \alpha \leqslant r_i - 1$, $J_{r_i}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, 1 en position $\alpha + 1$ sur la 1^{re} ligne.

$\alpha \geqslant r_i \quad J_{r_i}^{\alpha} = 0.$

Pour $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r_i} \end{bmatrix}$, on a $J_{r_i} X = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{r_i} \\ 0 \end{bmatrix}$ donc :

$$\| J_{r_i} X \|^2 = \sum_{j=2}^{r_i} |x_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{r_i} |x_j|^2 = \| X \|^2 \quad \text{et} \quad \| J_{r_i} \| \leqslant 1.$$

I_{r_i} et J_{r_i} étant permutables, on a :

$$M_i'^k = (\lambda_i' I_{r_i} + J_{r_i})^k = \sum_{\alpha=0}^{k} \mathrm{C}_k^{\alpha} \lambda_i'^{k-\alpha} J_{r_i}^{\alpha}$$

donc, pour $k \geqslant n$:

$$M_i'^k = \sum_{\alpha=0}^{n-1} n \, \mathrm{C}_k^\alpha \lambda_i'^{k-\alpha} J_{r_i}^\alpha$$

(car pour $\alpha \geqslant n$, on a $\alpha \geqslant r_i$, donc $J_{r_i}^\alpha = 0$).

On en déduit :

$$|||M_i'^k||| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha} |||J_{r_i}^\alpha||| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha}$$

(car $|||J_{r_i}^\alpha||| \leqslant |||J_{r_i}|||^\alpha \leqslant 1$).

$\mathrm{C}_k^\alpha = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-\alpha+1)}{\alpha!} \sim \dfrac{k^\alpha}{\alpha!}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{C}_k^\alpha \left|\lambda_i'\right|^{k-\alpha} = 0$ (puissance et exponentielle).

Il en résulte immédiatement $\lim\limits_{k\to+\infty} M_i'^k = 0$ et puisque :

$$M'^k = \begin{pmatrix} M_1'^k & & & (0) \\ & M_2'^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_p'^k \end{pmatrix}$$

on a aussi :

$$\lim_{k\to+\infty} M'^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{k\to+\infty} M_k = 0.$$

3) a) A est inversible d'après A.1)a). D diagonale a ses éléments diagonaux non nuls, elle est donc inversible.

$AX = B$ s'écrit $DX = -GX + B$ et équivaut donc à :

$$X = -D^{-1}GX + D^{-1}B.$$

b) Posons $A' = \left[a_{ij}'\right]$, on a $a_{ii}' = 0$ et pour $j \neq i$, $a_{ij}' = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ donc, avec la notation du B.1)b), pour tout i, $R_i < 1$ et $G_{A'} \subset \left\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\right\}$. Il en résulte $\rho(A') < 1$.

D'après le B.2), on en déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} A'^k = 0$.

c) $X_{k+1} = A'X_k + B'$ et $L = A'L + B'$ donnent :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ X_{k+1} - L = A'(X_k - L).$$

Donc $X_k - L = A'^k(X_0 - L)$ et, d'après la question précédente :

$$\lim_{k\to+\infty} X_k - L = 0.$$

Partie C

1) a) Soit y_0 le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$. On sait que pour $y \in A$, on a :

$$d\left(b, \operatorname{Im}\Phi_A\right) = \| b - y \|$$

si et seulement si $y = y_0$. En conséquence, x est pseudo-solution de (2) si et seulement si $x \in \Phi_A^{-1}\left(\left\{y_0\right\}\right)$.

b) Si Φ_A est injective, $\Phi_A^{-1}\left(\left\{y_0\right\}\right)$ est un singleton : $\left\{x_0\right\}$.

c) D'après ce qui précède, x est pseudo-solution de (2) si et seulement si $\Phi_A(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im}\Phi_A$ donc si et seulement si :

$$\forall z \in \operatorname{Im}\Phi_A,\quad \langle z \,|\, \Phi_A(x) - b\rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathbb{R}^p,\quad \langle \Phi_A(y) \,|\, \Phi_A(x) - b\rangle = 0.$$

Cette dernière condition s'écrit :

$$\forall y \in \mathbb{R}^p,\quad {}^t(AY)(AX - B) = 0 \quad \text{soit} \quad \forall y \in \mathbb{R}^p,\quad {}^tY\left({}^tAAX - {}^tAB\right) = 0$$

soit encore :

$${}^tAAX = {}^tAB.$$

2) On a $S = \sum_{k=1}^{n} \|\overrightarrow{M_kH_k}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$ donc $S = \|AX - B\|^2$ en posant :

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,2)\ ,\quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,1) \ \text{ et } \ B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$$

Φ_A est injective si et seulement si $\operatorname{rg} A = 2$ c'est-à-dire si $(x_1, \ldots, x_n)$ est non colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$ ou encore s'il existe i, j tels que $x_i \neq x_j$.

La pseudo-solution de $AX = B$ est alors définie par ${}^tAAX = {}^tAB$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

ou encore, en posant $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} \|x\|^2 & \langle x \,|\, u\rangle \\ \langle x \,|\, u\rangle & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x \,|\, y\rangle \\ \langle u \,|\, y\rangle \end{bmatrix}$$

d'où :

$$a = \frac{\langle x \,|\, y\rangle - \langle u \,|\, x\rangle\langle u \,|\, y\rangle}{\|x\|^2 - \langle u \,|\, x\rangle^2}\ ,\quad b = \frac{\langle u \,|\, y\rangle\|x\|^2 - \langle u \,|\, x\rangle\langle x \,|\, y\rangle}{\|x\|^2 - \langle u \,|\, x\rangle^2}.$$

3) a) Par définition de $\mathrm{d}(b, \Phi_A(C))$, à tout $k \in \mathbb{N}$, on peut associer $y_k \in \Phi_A(C)$, donc $x_k \in C$ ($y_k = \Phi_A(x_k)$) tel que :

$$\mathrm{d}^2\left(b, \Phi_A(C)\right) \leqslant \|\ \Phi_A(x_k) - b\|^2 \leqslant \frac{1}{k+1} + \mathrm{d}^2\left(b, \Phi_A(C)\right)$$

d'où :

$$\lim_{k \to +\infty} \|\ \Phi_A(x_k) - b)\| = \mathrm{d}\left(b, \Phi_A(C)\right).$$

b) Soit k et ℓ entiers naturel tels que $k < \ell$, on a (formule de la médiane) :

$$\|y_k - b\|^2 + \|y_\ell - b\|^2 = 2\left\|\frac{y_k + y_\ell}{2} - b\right\|^2 + \frac{1}{2}\|y_k - y_\ell\|^2$$

donc :

$$\begin{aligned} \|y_k - y_\ell\|^2 &= 2\|y_k - b\|^2 + 2\|y_\ell - b\|^2 - 4\left\|\frac{y_k - y_\ell}{2} - b\right\|^2 \\ &\leqslant 2\left(\mathrm{d}^2\left(b, \Phi_A(C)\right) + \frac{1}{k+1}\right) + 2\left(\mathrm{d}^2\left(b, \Phi_A(C)\right) + \frac{1}{\ell+1}\right) - 4\mathrm{d}^2\left(b, \Phi_A(C)\right) \end{aligned}$$

($\frac{y_k + y_\ell}{2}$ appartient à C par convexité de C donc $\left\| \frac{y_k + y_\ell}{2} - b \right\| \geqslant \mathrm{d}\big(b, \Phi_A(C)\big)$ soit aussi :

$$-4 \left\| \frac{y_k + y_\ell}{2} - b \right\|^2 \leqslant -4\mathrm{d}^2\big(b, \Phi_A(C)\big)\big).$$

Finalement :

$$\| y_k - y_\ell \|^2 \leqslant \frac{2}{k+1} + \frac{2}{\ell+1} \leqslant \frac{4}{k+1}$$

et (y_k) est une suite de Cauchy de $\Phi_A(C)$.

c) Dans l'espace complet $\mathbb{R}^n$, la suite :

$$(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(\Phi_A\,(x_k)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$$

est donc convergente vers z_0.

$\Phi_A(C)$ est par hypothèse fermé, donc $z_0 \in \Phi_A(C)$ et il existe $x_0 \in C$ tel que $z_0 = \Phi_A(x_0)$.

Par continuité de la norme, on a alors :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\Phi_A(x_k) - b\right\| = \left\|\Phi_A(x_0) - b\right\|$$

c'est-à-dire :

$$d\big(b, \Phi_A(C)\big) = \left\|\Phi_A(x_0) - b\right\|.$$

Donc x_0 est pseudo-solution de $\Phi_A(x) = b$.

2 Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ Projecteurs orthogonaux

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, $(n \geqslant 1)$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. On note $d(x, y)$ la distance de deux points x, y de $\mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \| x - y \|.$$

Partie A

1) Montrer l'identité du parallélograme :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right) \tag{1}$$

En déduire que si a, b, c sont trois points de $\mathbb{R}^n$, m désignant le milieu de $[b, c]$, (c'est-à-dire $m = \frac{b+c}{2}$), on a :

$$\| a - b \|^2 + \| a - c \|^2 = 2\| a - m \|^2 + \frac{1}{2}\| b - c \|^2 \tag{2}$$

2) La distance d'un point a à une partie fermée A d'un espace vectoriel normé étant définie par $d(a, A) = \inf_{x\in A} d(a, x)$, un projeté de a sur A est un point α de A tel que $d(a, A) = d(a, \alpha)$.

On se propose de démontrer que, si A est une partie convexe, fermée, non vide de $\mathbb{R}^n$, alors chaque point a de $\mathbb{R}^n$ a un projeté et un seul sur A.

Pour cela, a étant un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, considérer une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(a, x_p)$ tende vers $d(a, A)$ pour p tendant vers l'infini, et utiliser la question précédente pour établir que la suite (x_p) est une suite de Cauchy.

Conclure, en justifiant clairement chaque étape du raisonnement.

3) On vient de définir la projection sur le convexe fermé non vide A, application qui sera notée P_A dans la suite, par :

$$\begin{array}{ll} (i) & P_A\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R}^n, P_A(x) \in A \\ (iii) & \forall y \in A, \| x - P_A(x) \| \leqslant \| x - y \| \end{array}$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \in A \iff P_A(x) = x \text{ et que } P_A\left(\mathbb{R}^n\right) = A.$$

4) Le but de cette question est d'établir une nouvelle caractérisation du projeté $P_A(x)$ du point x sur A, soit :

$$\forall y \in A, \left\langle x - P_A(x) \,\middle|\, P_A(x) - y \right\rangle \geqslant 0 \tag{3}$$

a) Montrer que cela équivaut à montrer l'égalité des ensembles E_1 et E_2 définis par :

$$E_1 = \{z \in A \mid \forall\, y \in A, \| x - z \| \leqslant \| x - y \|\}$$

$$E_2 = \{z \in A \mid \forall\, y \in A, \left\langle x - z \,\middle|\, z - y \right\rangle \geqslant 0\}$$

b) Montrer cette égalité. On pourra commencer par établir l'identité :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 = 2\left\langle x - z \,\middle|\, z - y \right\rangle + \| z - y \|^2 \tag{4}$$

et en déduire directement l'inclusion $E_2 \subset E_1$; pour prouver l'inclusion inverse, on pourra écrire (4) en remplaçant y par $y_t = ty + (1-t)z,\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$.

5) Montrer que l'inégalité (3) est encore équivalente à la suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left\langle x - P_A(x) \,\middle|\, P_A(x) - P_A(y) \right\rangle \geqslant 0 \tag{5}$$

6) Montrer que, pour tout couple (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left\| P_A(u_1) - P_A(u_2) \right\| \leqslant \| u_1 - u_2 \|.$$

Qu'en déduit-on ?

À partir de cette question, on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,
- $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

7) Soit M un sous espace vectoriel de E. On rappelle que M est complet (car de dimension finie) donc fermé.

a) Soit $u \in E$, montrer que $P_M(u)$ est *l'unique* vecteur v de M tel que :

$$\forall w \in M, \left\langle u - v \,\middle|\, w \right\rangle = 0.$$

b) Montrer que $P_M \in L(E)$; que $P_M \circ P_M = P_M$ et que :

$$M = \operatorname{Im} P_M = (\operatorname{Ker} P_M)^\perp.$$

P_M est donc le projecteur orthognal sur M. On note $\operatorname{Proj}(E)$ l'ensemble des projecteur orthogonaux sur un sous espace vectoriel de E.

8) Soit $P \in L(E)$. Montrer que $P \in \operatorname{Proj}(E)$ est équivalent à :

$$\left\{P^2 = P \text{ et } \forall\, x \in E, \forall y \in E, \left\langle x \,\middle|\, P(y) \right\rangle = \left\langle P(x) \,\middle|\, y \right\rangle\right\}.$$

9) Soit $P \in L(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$P \in \operatorname{Proj}(E) \quad \text{et} \quad \left\{P^2 = P \text{ et } \forall\, x \in E, \| P(x) \| \leqslant \| x \|\right\}.$$

Partie B

On note $\preccurlyeq$ la relation sur $L(E)$ définie par $R \preccurlyeq S$ si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \langle (S-R)(x) \mid x \rangle \geqslant 0.$$

Dans toute cette partie, P et Q sont des éléments de $\mathrm{Proj}(E)$ et, pour simplifier, on note PQ au lieu de $P \circ Q$.

1) Montrer l'équivalence des six propositions suivantes :

(i) $Q - P \in \mathrm{Proj}(E)$

(ii) $P \preccurlyeq Q$

(iii) $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Im}\, Q$

(iv) $QP = P$

(v) $PQ = P$

(vi) $QP + PQ = 2P$

2) Montrer l'équivalence des cinq propositions suivantes :

(i) $P + Q \in \mathrm{Proj}(E)$

(ii) $\forall x \in E,\ \langle P(x) \mid Q(x) \rangle = 0$

(iii) $PQ = 0$

(iv) $\forall x \in \mathrm{Im}\, P, \forall y \in \mathrm{Im}\, Q,\ \langle x \mid y \rangle = 0$

(v) $P + Q$ est le projecteur orthogonal sur $V = \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q$

3) Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $PQ \in \mathrm{Proj}(E)$

(ii) $PQ = QP$

(iii) PQ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, P \cap \mathrm{Im}\, Q$

4) Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $P + Q - PQ \in \mathrm{Proj}(E)$

(ii) $PQ = QP$

(ii) $P + Q - PQ$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q$

5) Montrer : $PQ = QP \iff$ il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres communs à P et Q.

6) On pose $A = PQP$. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x \mid A(y) \rangle = \langle A(x) \mid y \rangle,$$

montrer aussi que :

$$\forall x \in E, \| A(x) \| \leqslant \| x \| \ \text{ et } \ \langle x \mid A(x) \rangle \geqslant 0.$$

Pour x et y fixés dans E, étudier les suites de termes généraux :

$$\langle x \mid A^p(x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle x \mid A^p(y) \rangle.$$

Partie A

1) En développant les carrés scalaires, on obtient :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y \mid x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle$$

puis en additionnant membre à membre :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (1)$$

D'après (1), on a :

$$\|b-a\|^2 + \|c-a\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|b+c-2a\|^2 + \|b-c\|^2\right)$$

donc avec $m = \dfrac{b+c}{2}$, il vient :

$$\|b-a\|^2 + \|c-a\|^2 = 2\|m-a\|^2 + \frac{1}{2}\|b-c\|^2. \qquad (2)$$

2) *Projection sur un convexe, fermé, non vide*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $d(a,A) = \inf\limits_{x\in A} d(a,x)$. Nous posons $d = d(a,A)$ donc :

$$d^2 = \inf_{x\in A} \|a-x\|^2.$$

- *Construction d'une suite* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$: par définition de la borne inférieure, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_p \in A$ tel que :

$$d(a,A)^2 \leqslant d(a,x_p)^2 \leqslant d(a,A)^2 + \frac{1}{p} \quad \text{soit} \quad d^2 \leqslant \|a-x_p\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p}$$

On a alors par construction :

$$(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \in A^{\mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} \|a-x_p\| = d.$$

- *Montrons que* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *est de Cauchy.*

D'après (2), on a :

$$\|x_p-x_q\|^2 = 2\|x_p-a\|^2 + 2\|x_q-a\|^2 - 4\left\|\frac{x_p+x_q}{2} - a\right\|^2$$

x_p et x_q sont dans A convexe, donc $\dfrac{x_p+x_q}{2}$ est aussi dans A et on en déduit :

$$\|x_p-a\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p} \quad , \quad \|x_q-a\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{x_p+x_q}{2} - a\right\|^2 \geqslant d^2$$

d'où, en supposant $q \geqslant p$:

$$\|x_p-x_q\|^2 \leqslant \frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leqslant \frac{4}{p}.$$

En conséquence, en posant $\delta_p = \sup\limits_{q\in [\![p,+\infty[\![} \|x_p-x_q\|^2$, on a :

$$0 \leqslant \delta_p \leqslant \frac{4}{p} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \delta_p = 0,$$

ce qui prouve que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de A. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet, cette suite converge vers $\alpha \in \overline{A}$, or A est fermé, donc $\overline{A} = A$, et finalement $\alpha \in A$.

L'inégalité de définition de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$:

$$d^2 \leqslant \| a - x_p \|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{p}$$

avec la continuité de la norme donne, par passage à la limite, que $\| a - \alpha \| = d$. Ainsi, α est un projeté de a sur A.

- *Unicité du projeté*

Supposons que $d = \| a - \alpha \| = \| a - \beta \|$ avec $\alpha \in A$, $\beta \in A$.

Alors, avec (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \| \alpha - \beta \|^2 &= 2\| \alpha - a \|^2 + 2\| \beta - a \|^2 - 4 \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\|^2 \\ &= 4d^2 - 4 \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\|^2 \end{aligned}$$

Par convexité de A, on a :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \in A \quad \text{donc} \quad \left\| \frac{\alpha + \beta}{2} - a \right\| \geqslant \alpha$$

et il en résulte $\| \alpha - \beta \|^2 \leqslant 0$ d'où finalement $\alpha = \beta$.

3) Il est clair que si $x \in A$, alors $\inf\limits_{y\in A} \| x - y \| = 0$, valeur atteinte pour $y = x$, donc $P_A(x) = x$.

Réciproquement, si $P_A(x) = x$, puisque, par définition $P_A(x) \in A$, il vient $x \in A$.

De $P_A(x) = x$ pour tout x de A, on déduit $A \subset P_A(\mathbb{R}^n)$ et comme, par définition $P_A(\mathbb{R}^n) \subset A$, il vient finalement $P_A(\mathbb{R}^n) = A$.

4) *Autre caractérisation de $P_A(x)$*

On veut prouver que si $z \in A$:

$$z = P_A(x) \iff \forall y \in A,\ \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0. \tag{3}$$

a) Montrons que (3) est vraie si et seulement si $E_1 = E_2$.

$$E_1 = \{ z \in A \ /\ \forall\, y \in A,\ \| x - z \| \leqslant \| x - y \| \}$$
$$E_2 = \{ z \in A \ /\ \forall\, y \in A,\ \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0 \}$$

D'après le 2), $z = P_A(x)$ s'écrit $z \in E_1$ et la proposition $\forall y \in A,\ \langle x - z \mid z - y \rangle \geqslant 0$ s'écrit $z \in E_2$, donc (3) est vraie si et seulement si :

$$z \in E_1 \iff z \in E_2 \quad \text{soit si et seulement si} \quad E_1 = E_2 .$$

b) Montrons que $E_1 = E_2$.

- L'identité (4) :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 = 2\langle x - z \mid z - y \rangle + \| z - y \|^2$$

provient du développement :

$$\| x - y \|^2 = \| x - z + z - y \|^2 = \| x - z \|^2 + 2\langle x - z \mid z - y \rangle + \| z - y \|^2.$$

Cette identité prouve que si $z \in E_2$ alors :

$$\| x - y \|^2 - \| x - z \|^2 \geqslant 0$$

donc $z \in E_1$ et $E_2 \subset E_1$.

Montrons que $E_1 \subset E_2$. On suppose que $z \in E_1$, alors par convexité de A, pour tout y de A et tout $t \in [0,1]$, $y_t = ty + (1-t)z$ appartient à A, donc :

$$\| x - y_t \|^2 - \| x - z \|^2 \geqslant 0.$$

Avec l'identité précédente, et en notant que $z - y_t = t(z - y)$, on en déduit :

$$\forall t \in [0,1], \quad 2t\langle x - z \,|\, z - y \rangle + t^2 \| z - y \|^2 \geqslant 0.$$

Ce qui exige $\langle x - z \,|\, z - y \rangle \geqslant 0$ car, dans le cas contraire, c'est-à-dire $\langle x - z \,|\, z - y \rangle < 0$, on aurait, pour t tendant vers 0 :

$$2t\langle x - z \,|\, z - y \rangle + t^2 \| z - y \|^2 \sim 2t\langle x - z \,|\, z - y \rangle$$

et $2t\langle x - z \,|\, z - y \rangle + t^2 \| z - y \|^2$ serait strictement négatif pour t voisin de 0.

On a ainsi prouvé que $\forall y \in A$, $\langle x - z \,|\, z - y \rangle \geqslant 0$ donc $z \in E_2$ et enfin $E_1 \subset E_2$.

5) Montrons que l'inégalité (3) équivaut à (5) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in A, \langle x - P_A(x) \,|\, P_A(x) - y \rangle \geqslant 0 \tag{3}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x - P_A(x) \,|\, P_A(x) - P_A(y) \rangle \geqslant 0 \tag{5}$$

Pour tout y de $\mathbb{R}^n$, on a $P_A(y) \in A$ donc (3) $\Rightarrow$ (5).

Pour tout y de A, on a $y = P_A(y)$ donc (5) $\Rightarrow$ (3).

6) Montrons que :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left\| P_A(u_1) - P_A(u_2) \right\| \leqslant \| u_1 - u_2 \|.$$

On développe :

$$\begin{aligned}
\| u_1 - u_2 \|^2 &= \left\| u_1 - P_A(u_1) + P_A(u_1) - P_A(u_2) + P_A(u_2) - u_2 \right\|^2 \\
&= \left\| P_A(u_1) - P_A(u_2) \right\|^2 + \left\| u_1 - P_A(u_1) + P_A(u_2) - u_2 \right\|^2 \\
&\qquad + 2\langle u_1 - P_A(u_1) \,|\, P_A(u_1) - P_A(u_2) \rangle \\
&\qquad + 2\langle u_2 - P_A(u_2) \,|\, P_A(u_2) - P_A(u_1) \rangle \\
&\geqslant \left\| P_A(u_1) - P_A(u_2) \right\|^2
\end{aligned}$$

car les trois autres termes sont $\geqslant 0$.

On a ainsi montré que P_A est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

7) a) *Projection sur un sous-espace vectoriel M*

Étant donné $u \in E$, soit $v = P_M(u)$. En tant que sous-espace vectoriel de E, M est convexe et l'énoncé rappelle qu'il est fermé, on dispose donc de l'application P_M. Alors pour tout $w \in M$, on a :

$$v + w \in M \quad \text{et} \quad v - w \in M,$$

donc en appliquant (3) avec $y = v + w$, puis avec $y = v - w$, on obtient :

$$\langle u - v \,|\, w \rangle \leqslant 0 \quad \text{puis} \quad \langle u - v \,|\, w \rangle \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \langle u - v \,|\, w \rangle = 0.$$

Inversement, si $v \in M$ est tel que :

$$\forall w \in M, \langle u - v \,|\, w \rangle = 0,$$

alors v vérifie évidemment (3) donc $v = P_M(u)$.

En conséquence, pour $v \in M$, on a :

$$v = P_M(u) \iff \forall w \in M, \langle u - v \,|\, w \rangle = 0 \tag{3'}$$

L'unicité de $v \in M$ vérifiant (3') résulte alors de l'unicité de $v \in M$ vérifiant (3).

b) ▪ Montrons que $P_M \in L(E)$ et que $P_M \circ P_M = P_M$.

Soit $v = P_M(u)$, $v' = P_M(u')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $w \in M$, on a :

$$\langle u - v \mid w \rangle = 0 \ , \ \langle u' - v' \mid w \rangle = 0,$$

donc $\langle u + \lambda u' - (v + \lambda v') \mid w \rangle = 0$ ce qui prouve :

$$P_M(u + \lambda u') = P_M(u) + \lambda P_M(u').$$

Si $u \in M$ alors, d'après le 3), $u = P_M(u)$ donc :

$$\forall u \in E, P_M \circ P_M(u) = P_M(u).$$

▪ Montrons que $\mathrm{Im}\, P_M = M = (\mathrm{Ker}\, P_M)^{\perp}$.

On sait déjà que $M = \mathrm{Im}\, P_M$ puisque l'on a vu dans le 3) que $P_M(\mathbb{R}^n) = M$.

D'après (3'), $P_M(u) = 0$ équivaut à :

$$\forall w \in M, \langle u - 0 \mid w \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \langle u \mid w \rangle = 0,$$

donc $u \in \mathrm{Ker}\, P_M$ équivaut à $u \in M^{\perp}$, ce qui prouve $\mathrm{Ker}\, P_M = M^{\perp}$ et donc $M = (\mathrm{Ker}\, P_M)^{\perp}$.

> On a ainsi retrouvé que, dans le cas où le convexe fermé A est un sous-espace vectoriel de E, la projection P_A n'est rien d'autre que le projecteur orthogonal sur A tel qu'il est défini en cours.

8) $P \in L(E)$, montrons :

$$P \in \mathrm{Proj}(E) \iff \{P^2 = P \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle\}.$$

▪ Si $P \in \mathrm{Proj}(E)$ alors on a $P^2 = P$ et il existe un sous-espace vectoriel M tel que $P = P_M$.

Pour tout (x, y) de E^2, on a $P(x) \in M$ donc :

$$\langle x - P(x) \mid P(y) \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid P(y) \rangle$$

de même :

$$\langle P(x) \mid y \rangle = \langle P(x) \mid P(y) \rangle \quad \text{d'où} \quad \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle.$$

▪ Si $P^2 = P$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle$, alors P est un projecteur, il reste à montrer qu'il est orthogonal.

On sait que $E = \mathrm{Im}\, P \oplus \mathrm{Ker}\, P$.

Soit alors $x \in \mathrm{Ker}\, P$ et $y \in \mathrm{Im}\, P$ donc $y = P(y)$ et :

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid P(y) \rangle = \langle P(x) \mid y \rangle = 0.$$

Ceci prouve :

$$\mathrm{Ker}\, P \subset (\mathrm{Im}\, P)^{\perp} \ (\text{ou } \mathrm{Im}\, P \subset (\mathrm{Ker}\, P)^{\perp}).$$

Comme le théorème du rang donne :

$$\dim \mathrm{Ker}\, P = n - \dim \mathrm{Im}\, P = \dim (\mathrm{Im}\, P)^{\perp},$$

il vient finalement :

$$\mathrm{Ker}\, P = (\mathrm{Im}\, P)^{\perp} \quad \text{donc aussi} \quad \mathrm{Im}\, P = (\mathrm{Ker}\, P)^{\perp}.$$

9) $P \in L(E)$, montrons que :

$$P \in \mathrm{Proj}(E) \iff \{P^2 = P \text{ et } \forall x \in E, \| P(x) \| \leqslant \| x \|\}.$$

▪ Si $P \in \mathrm{Proj}(E)$, alors $P^2 = P$ et en appliquant 8) avec $y = P(x)$, il vient :

$$\| P(x) \|^2 = \langle x \mid P(x) \rangle,$$

donc d'après Cauchy-Schwarz :

$$\| P(x) \|^2 \leqslant \| x \| \, \| P(x) \|.$$

Pour $P(x) \neq 0$, on en déduit $\| P(x) \| \leqslant \| x \|$, et pour $P(x) = 0$ c'est, bien sûr, encore vrai.

- Si $P^2 = P$ et $\forall x \in E, \| P(x) \| \leqslant \| x \|$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} P$ et $y \in \operatorname{Im} P$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(\lambda x + y) = P(y) = y \quad \text{donc} \quad \| y \|^2 \leqslant \| \lambda x + y \|^2.$$

Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \| x \|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \geqslant 0$ ce qui exige $\langle x \mid y \rangle = 0$.

Comme en 8), on en conclut $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$.

Partie B

1) *Remarque.* Pour tout projecteur orthogonal Π, il a été vu en A.9) que :

$$\forall x \in E, \langle \Pi(x) \mid x \rangle = \| \Pi(x) \|^2.$$

- Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

Si $Q - P \in \operatorname{Proj}(E)$ alors :

$$\forall x \in E, \langle (Q-P)(x) \mid x \rangle = \| (Q-P)(x) \|^2 \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad P \leqslant Q.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

Soit $x \in \operatorname{Im} P$, alors $P(x) = x$. Formons :

$$\| x - Q(x) \|^2 = \| x \|^2 - 2\langle x \mid Q(x) \rangle + \| Q(x) \|^2.$$

$P \leqslant Q$ donne $\| x \|^2 = \langle P(x) \mid x \rangle \leqslant \langle Q(x) \mid x \rangle$ donc :

$$\| x - Q(x) \|^2 \leqslant \| Q(x) \|^2 - \langle x \mid Q(x) \rangle.$$

Soit, d'après la remarque, $\| x - Q(x) \|^2 \leqslant 0$.

Il en résulte $x = Q(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} Q$ et enfin $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$.

- Montrons que $\boxed{(iii) \iff (iv)}$.

> *Attention !* ici on obtient directement l'équivalence puisque la réciproque est évidente.

  - $(iii) \Rightarrow (iv)$ Pour tout x de E, $P(x) \in \operatorname{Im} P$ donc $P(x) \in \operatorname{Im} Q$ et Q étant un projecteur :

$$Q\big(P(x)\big) = P(x).$$

  - $(iv) \Rightarrow (iii)$ car on a toujours $\operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} Q$

- Montrons que $\boxed{(iv) \iff (v)}$.
  - $(iv) \Rightarrow (v)$ Avec (iv) on a aussi (iii) :

$$\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q \quad \text{d'où} \quad (\operatorname{Im} P)^{\perp} \supset (\operatorname{Im} Q)^{\perp} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{Ker} P \supset \operatorname{Ker} Q.$$

  Pour tout x de E, $x - Q(x) \in \operatorname{Ker} Q$ donc $x - Q(x) \in \operatorname{Ker} P$, ce qui donne $P(x) = P\big(Q(x)\big)$.

  - $(v) \Rightarrow (iv)$ $P = PQ$ donne $\operatorname{Ker} Q \subset \operatorname{Ker} P$ donc, en passant aux orthogonaux :

$$\operatorname{Im} Q \supset \operatorname{Im} P.$$

  On a ainsi prouvé $(v) \Rightarrow (iii)$ et puisque $(iii) \iff (iv)$, on a $(v) \Rightarrow (iv)$.

- Montrons que $\boxed{(v) \Rightarrow (vi)}$.

Évidence car avec (v) on a aussi (iv).

- Montrons que $\boxed{(vi) \Rightarrow (i)}$.

Développons :

$$(Q-P)^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - 2P + P = Q - P$$

donc $Q - P$ est un projecteur.

P et Q étant des projecteurs orthogonaux, ils sont symétriques donc, l'ensemble des endomorphismes symétriques de E étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, le projecteur $P - Q$ est symétrique et, d'après le A.8), il est orthogonal.

2) ▪ Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

$P + Q$ étant un projecteur orthogonal, on a :

$$\forall x \in E, \langle x \mid P(x) + Q(x) \rangle = \| P(x) + Q(x) \|^2$$

donc :

$$\langle x \mid P(x) \rangle + \langle x \mid Q(x) \rangle = \| P(x) \|^2 + 2\langle P(x) \mid Q(x) \rangle + \| Q(x) \|^2.$$

De même, $P \in \mathrm{Proj}(E)$ et $Q \in \mathrm{Proj}(E)$ donne :

$$\langle x \mid P(x) \rangle = \| P(x) \|^2 \quad \text{et} \quad \langle x \mid Q(x) \rangle = \| Q(x) \|^2$$

d'où finalement :

$$\langle P(x) \mid Q(x) \rangle = 0.$$

▪ Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

Formons :

$$\begin{aligned} \| PQ(x) \|^2 &= \langle PQ(x) \mid PQ(x) \rangle \\ &= \langle Q(x) \mid P^2Q(x) \rangle && \text{car } P \text{ est symétrique} \\ &= \langle Q^2(x) \mid PQ(x) \rangle && \text{car } P^2 = P \text{ et } Q = Q^2 \\ &= \langle Q(y) \mid P(y) \rangle && \text{avec } y = Q(x) \\ &= 0 && \text{d'après } (ii) \end{aligned}$$

▪ Montrons que $\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$.

$PQ = 0$ donne $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Ker}\, P$ donc $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Im}\, P^\perp$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\, Q$ et $\mathrm{Im}\, P$ sont orthogonaux.

▪ Montrons que $\boxed{(iv) \Rightarrow (v)}$.

(iv) donne $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Im}\, P^\perp$ donc $\mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Ker}\, P$ et $PQ = 0$,
mais aussi $\mathrm{Im}\, P \subset \mathrm{Im}\, Q^\perp$ donc $\mathrm{Im}\, P \subset \mathrm{Ker}\, Q$ et $QP = 0$,
alors $(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P^2 + Q^2 = P + Q$. Ainsi $P + Q$ est un projecteur.
Puisque P et Q sont symétriques, $P + Q$ l'est également et ainsi $P + Q \in \mathrm{Proj}(E)$. Il est clair que :

$$\mathrm{Im}(P+Q) \subset \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q.$$

Inversement soit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathrm{Im}\, P$, $x_2 \in \mathrm{Im}\, Q$.
On a vu précédemment que $PQ = 0$ et $QP = 0$, donc de $x_2 \in \mathrm{Im}\, Q$, on déduit $x_2 = Q(x_2)$ et $P(x_2) = PQ(x_2) = 0$, de même $Q(x_1) = QP(x_1) = 0$, et finalement :

$$(P+Q)(x_1 + x_2) = P(x_1) + Q(x_2) = x_1 + x_2 = x.$$

On a ainsi montré :

$$\mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q \subset \mathrm{Im}(P+Q).$$

En conclusion, $\mathrm{Im}(P+Q) = \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, Q = \mathrm{Im}\, P \oplus \mathrm{Im}\, Q$ car les sous-espaces $\mathrm{Im}\, P$ et $\mathrm{Im}\, Q$ sont orthogonaux.

▪ Montrons que $\boxed{(v) \Rightarrow (i)}$. Évidence.

3) ▪ Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

La symétrie de P et Q donne pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle QP(x) \mid y \rangle = \langle P(x) \mid Q(y) \rangle = \langle x \mid PQ(y) \rangle.$$

De même la symétrie de PQ donne :

$$\langle PQ(x) \mid y \rangle = \langle x \mid PQ(y) \rangle.$$

On a donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left\langle QP(x) - PQ(x) \mid y \right\rangle = 0$$

d'où :

$$\forall x \in E, QP(x) = PQ(x) \quad \text{soit} \quad QP = PQ.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

$PQ = QP$ donne $(PQ)^2 = PQQP = PQP = P^2Q = PQ$: PQ est un projecteur.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\left\langle PQ(x) \mid y \right\rangle = \left\langle Q(x) \mid P(y) \right\rangle = \left\langle x \mid QP(y) \right\rangle$ (P et Q symétriques), donc :

$$\left\langle PQ(x) \mid y \right\rangle = \left\langle x \mid PQ(y) \right\rangle \text{ (car } PQ = QP).$$

Ainsi d'après A.8), on a $PQ \in \operatorname{Proj}(E)$.

Il reste à montrer $\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$

– on sait que $\operatorname{Im} PQ \subset \operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} Q$ donc $PQ = QP$ donne :

$$\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} QP \subset \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$$

– si $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$, on a $Q(x) = x$ et $P(x) = x$ donc $PQ(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im} PQ$.

Ainsi $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} PQ$ et finalement $\operatorname{Im} PQ = \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$.

- Montrons que $\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$. Évidence.

4) - Montrons que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\left\langle P(x) + Q(x) - PQ(x) \mid y \right\rangle = \left\langle x \mid P(y) + Q(y) - PQ(y) \right\rangle$ et compte tenu de $P \in \operatorname{Proj}(E)$, $Q \in \operatorname{Proj}(E)$, il reste :

$$\left\langle PQ(x) \mid y \right\rangle = \left\langle x \mid PQ(y) \right\rangle.$$

Or :

$$\left\langle x \mid PQ(y) \right\rangle = \left\langle P(x) \mid Q(y) \right\rangle = \left\langle QP(x) \mid y \right\rangle$$

donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left\langle PQ(x) \mid y \right\rangle = \left\langle QP(x) \mid y \right\rangle \quad \text{et} \quad PQ = QP.$$

- Montrons que $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$.

D'après le 3), $PQ = QP$ donne $PQ \in \operatorname{Proj}(E)$.

Formons :

$$\begin{aligned}(P + Q - PQ)^2 &= P^2 + Q^2 + (PQ)^2 + PQ + QP - P^2Q - PQP - QPQ - PQ^2 \\ &= P + Q + PQ + PQ + PQ - PQ - PQ - PQ - PQ \\ &= P + Q - PQ\end{aligned}$$

Ainsi $P + Q - PQ$ est un projecteur.

La démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$ montre que ce projecteur est symétrique donc :

$$P + Q - PQ \in \operatorname{Proj}(E).$$

En écrivant $P + Q - PQ = P + Q(\operatorname{Id}_E - P)$, on obtient :

$$\operatorname{Im}(P + Q - PQ) \subset \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q$$

Inversement, soit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \operatorname{Im} P$, $x_2 \in \operatorname{Im} Q$, on a alors :

$$\begin{aligned}x &= (P + Q)(x_1 + x_2) - Q(x_1) - P(x_2) \\ x &= (P + Q)(x_1 + x_2) - QP(x_1) - PQ(x_2) \qquad \big(x_1 = P(x_1) \text{ et } x_2 = Q(x_2)\big) \\ x &= (P + Q - PQ)(x_1 + x_2) \qquad \text{(car } PQ = QP)\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im}(P + Q - PQ)$ et, finalement :

$$\operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q = \operatorname{Im}(P + Q - PQ).$$

5) Montrons que :

$$PQ = QP \qquad (i)$$

$$\iff \quad P \text{ et } Q \text{ sont simultanément diagonalisables en base orthonormale.} \qquad (ii)$$

- Supposons (i). $P \in \mathrm{Proj}(E)$ donc :

$$E = \operatorname{Im} P \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Ker} P \text{ (somme directe orthogonale).}$$

D'autre part, $PQ = QP$, donc les sous-espaces propres de P, $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(P - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker} P$, sont stables par Q.

Q induit donc sur $\operatorname{Im} P$ un projecteur orthogonal Q_1 :

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Ker} Q_1$$

et Q induit sur $\operatorname{Ker} P$ un projecteur orthogonal Q_2 :

$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} Q_2 \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Ker} Q_2 .$$

En conséquence :

$$E = \operatorname{Im} Q_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1 \oplus \operatorname{Im} Q_2 \oplus \operatorname{Ker} Q_2$$

est une somme directe orthogonale et une base orthonormale de E, adaptée à cette somme directe, est base de vecteurs propres communs à P et Q.

- La réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$ est évidente.

6) *$A = PQP$, étude des suites $\langle x \mid A^k(x) \rangle$ et $\langle x \mid A^k(y) \rangle$*

a) Montrons que $\langle x \mid A(y) \rangle = \langle A(x) \mid y \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle x \mid A(y) \rangle = \langle x \mid PQP(y) \rangle &= \langle P(x) \mid QP(y) \rangle && P \text{ symétrique}\\
&= \langle QP(x) \mid P(y) \rangle && Q \text{ symétrique}\\
&= \langle PQP(x) \mid y \rangle && P \text{ symétrique}
\end{aligned}$$

b) Montrons que $\| A(x) \| \leqslant \| x \|$ et $\langle x \mid A(x) \rangle \geqslant 0$.

P et Q étant des projecteurs orthogonaux, on a successivement :

$$\| PQP(x) \| \leqslant \| QP(x) \| \leqslant \| P(x) \| \leqslant \| x \|$$

$$\langle x \mid A(x) \rangle = \langle P(x) \mid Q(P(x)) \rangle = \| QP(x) \|^2 \geqslant 0.$$

c) *Étude de $u_k(x) = \langle x \mid A^k(x) \rangle$*

- si $k = 2p$, $\langle x \mid A^{2p}(x) \rangle = \langle A^p(x) \mid A^p(x) \rangle$ car A est symétrique, donc $u_{2p}(x) \geqslant 0$;
- si $k = 2p+1$, $\langle x \mid A^{2p+1}(x) \rangle = \langle y \mid A(y) \rangle$ avec $y = A^p(x)$, donc $u_{2p+1}(x) \geqslant 0$.

La suite $\left(u_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc positive, étudions maintenant la monotonie.

D'après Cauchy-Schwarz et b), on a :

$$u_1(x) = \langle x \mid A(x) \rangle \leqslant \| x \| \| A(x) \| \leqslant \| x \|^2 = u_0(x).$$

Soit l'hypothèse de récurrence $H(p)$:

$$\forall x \in E, \forall k \in [\![1, p-1]\!], u_k(x) \leqslant u_{k-1}(x).$$

Alors :

$$u_p(x) = \langle Ax \mid A^{p-1}x \rangle = u_{p-2}(Ax)$$

donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite $\left(u_k(Ax)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, il vient :

$$u_p(x) \leqslant u_{p-3}(Ax) \quad \text{soit} \quad u_p(x) \leqslant \langle Ax \mid A^{p-3}Ax \rangle$$

d'où encore :

$$u_p(x) \leqslant \langle x \mid A^{p-1}x \rangle \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_p(x) \leqslant u_{p-1}(x).$$

La propriété est récurrente et $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge vers $\ell(x) \in \mathbb{R}_+$.

d) *Étude de* $v_n(x, y) = \langle x \mid A^k(y) \rangle$

A^k étant symétrique, on a :

$$u_k(x+y) = \langle x+y \mid A^k(x+y) \rangle = \langle x \mid A^k(x) \rangle + \langle y \mid A^k(y) \rangle + 2\langle x \mid A^k(y) \rangle$$

donc :

$$v_k(x, y) = \frac{1}{2}\left[u_k(x+y) - u_k(x) - u_k(y)\right].$$

La suite $(v_k(x, y))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers :

$$\frac{1}{2}\big(\ell(x+y) - \ell(x) - \ell(y)\big).$$

3 Systèmes obtusangles

E désigne un espace vectoriel réel, euclidien, de dimension n. On note $\langle V \mid W \rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs V, W de E, et $\| V \| = \sqrt{\langle V \mid V \rangle}$ la norme correspondante.

Un système de vecteurs $(V_i, i \in I)$, est *obtusangle* si et seulement si l'on a, pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$:

$$\langle V_i \mid V_j \rangle < 0 \quad \text{(strictement)}.$$

Partie A

1) Montrer qu'il existe dans E un système obtusangle de $(n+1)$ vecteurs. On fera une récurrence sur la dimension de E.

Indication. Considérer un hyperplan F_{n-1} de E et un vecteur W orthogonal à F_{n-1} et, à partir d'un système obtusangle de n vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de F_{n-1}, montrer que l'on peut trouver un système de n vecteurs $V'_1, \ldots, V'_n$ tels que $V'_i = V_i - t\,W$ pour $i = 1, \ldots, n$, et tel que $(V'_1, \ldots, V'_n, W)$ soit un système obtusangle.

2) Montrer qu'un système obtusangle de E ne peut comporter plus de $n+1$ vecteurs. On fera une récurrence sur n.

Indication. En supposant que $(V_1, \ldots, V_{n+2})$ est un système obtusangle de E, projeter $V_1, \ldots, V_{n+1}$ sur l'orthogonal de V_{n+2}.

3) a) Montrer qu'un système obtusangle de $(n+1)$ vecteurs de E est de rang n.

b) Montrer que tout sous-système de n vecteurs d'un système obtusangle de $(n+1)$ vecteurs de E est une base de E.

4) a) Montrer que le rang d'un système obtusangle de p vecteurs de E, $p \geqslant 2$, est égal à p ou à $(p-1)$.

b) Montrer que si l'on a un système obtusangle de $(p+1)$ vecteurs dans un sous-espace F_p de dimension p de E, on ne peut lui adjoindre un $(p+2)^e$ vecteur de façon à obtenir un système obtusangle de E.

Partie B

1) Soit un système obtusangle de $(n+1)$ vecteurs $V_1, \dots, V_{n+1}$ de E. On suppose, dans cette question, que :

$$\|V_i\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \langle V_i \mid V_j \rangle = \cos\varphi \ (i \neq j)$$

indépendamment de i et de j, pour $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. Montrer que l'on a :

$$V_1 + V_2 + \dots + V_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = -\frac{1}{n}.$$

Indication. Écrire que les $(n+1)$ vecteurs $V_1, \dots, V_{n+1}$ sont liés.

2) Montrer que si le système $(V_1, \dots, V_p)$, $p \geqslant 2$, est obtusangle avec :

$$\| V_i \|^2 = 1 \ , \ \langle V_i \mid V_j \rangle = \cos\psi \qquad (i \neq j)$$

pour tout i, j de $[\![1, p]\!]$, alors $1 + (p-1)\cos\psi \geqslant 0$.

À quelle situation correspond l'égalité dans cette relation ?

Indication. Écrire que $\|V_1 + \dots + V_p\|^2 \geqslant 0$.

Partie C

1) Montrer que si $(V_1, \dots, V_p)$ est un système obtusangle de p vecteurs de E et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0$$

alors les λ_i sont tous de même signe (éventuellement nuls). En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \, V_i = 0.$$

2) Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base obtusangle de E. Supposons que pour un certain vecteur V de E, on ait :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i \quad \text{et que, pour tout } i, \quad \langle V \mid V_i \rangle > 0.$$

Montrer que, pour tout i, $\lambda_i > 0$ (strictement).

Partie D

On appelle matrice symétrique positive (resp. définie-positive) toute matrice associée à une forme quadratique positive (resp. définie-positive).

Pour une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs de E, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, on appelle *matrice de Gram* $MG(e_1, \dots, e_p)$ la matrice symétrique A d'ordre p, d'élément $a_{ij} = \langle e_i \mid e_j \rangle$ pour tout i, j de $[\![1, p]\!]$.

1) Montrer que le rang de $MG(e_1, \dots, e_p)$ est égal au rang du système de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$.

2) Soit A une matrice symétrique positive, $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, telle que $a_{ij} < 0$ pour tout (i, j) avec $i \ne j$.
Montrer que son rang est n ou $(n-1)$ et que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} > 0$.

Solution

Partie A

1) Pour $n = 1$, (V_1, V_2) avec $V_2 = -V_1 \ne 0$ est obtusangle. Supposons la propriété vraie pour $\dim E = n - 1$.
Soit maintenant E de dimension n, F un hyperplan de E et $W \in F^\perp \setminus \{0\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, F contient au moins un système obtusangle $(V_1, \dots, V_n)$.
Pour $t \in \mathbb{R}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $V_i' = V_i - tW$.
On obtient pour tout (i, j) :

$$\langle V_i' \mid V_j' \rangle = \langle V_i \mid V_j \rangle + t^2 \| W \|^2,$$

et pour tout i :

$$\langle V_i' \mid W \rangle = -t \| W \|^2$$

donc, pour $t > 0$, avec $t < \min\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{|\langle V_i \mid V_j \rangle|^{\frac{1}{2}}}{\| W \|}$, le système $(V_1', \dots, V_n', W)$ est obtusangle.
On a ainsi établi par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: tout espace euclidien de dimension $n \ge 1$ contient au moins un système obtusangle de $n + 1$ vecteurs.

2) ▪ Démontrons un préliminaire.
Soit $(V_1, \dots, V_p)$ un système obtusangle de E et, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, V_i' le projeté orthogonal de V_i sur l'hyperplan $H = V_p^\perp$. Alors $(V_1', \dots, V_{p-1}')$ est encore un système obtusangle.
Pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$:

$$V_i' = V_i - \frac{\langle V_p \mid V_i \rangle V_p}{\| V_p \|^2}$$

donc pour (i, j) tel que $1 \le i < j \le p - 1$, on obtient :

$$\langle V_i' \mid V_j' \rangle = \langle V_i \mid V_j \rangle - \frac{\langle V_p \mid V_i \rangle \langle V_p \mid V_j \rangle}{\| V_p \|^2}$$

et, sachant que $\langle V_i \mid V_j \rangle < 0$, $\langle V_p \mid V_i \rangle < 0$ et $\langle V_p \mid V_j \rangle < 0$, on en déduit :

$$\langle V_i' \mid V_j' \rangle < 0.$$

▪ Considérons maintenant la propriété $\mathcal{Q}(n)$: si un espace euclidien E contient un système obtusangle $(V_1, \dots, V_{n+1})$, alors $\dim E \ge n$.
La propriété préliminaire montre que $\mathcal{Q}(n-1) \Rightarrow \mathcal{Q}(n)$.
D'autre part, il est clair que $\mathcal{Q}(1)$ est vraie. En effet, dans un système obtusangle (V_1, V_2), la condition $\langle V_1 \mid V_2 \rangle < 0$ impose $V_1 \ne 0$ et $V_2 \ne 0$ donc $E \ne \{0\}$ c'est-à-dire $\dim E \ge 1$.
Ainsi la propriété est, d'après le principe de récurrence, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) a) Soit $(V_1, \ldots, V_{n+1})$ un système obtusangle de E, espace euclidien de dimension n.

Posons $r = \text{rg}(V_1, \ldots, V_{n+1})$.

D'après le 2), on a $r \geqslant n$ et comme évidemment $r \leqslant n$, il vient $r = n$.

b) De $(V_1, \ldots, V_{n+1})$, on peut, d'après a), extraire au moins un système libre de n vecteurs.

Soit maintenant un système de n vecteurs extrait de $(V_1, \ldots, V_{n+1})$. À une permutation près des V_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, on peut se ramener au cas où ce système est $(V_1, \ldots, V_n)$.

Supposons $(V_1, \ldots, V_n)$ lié, c'est-à-dire $\text{rg}(V_1, \ldots, V_n) \leqslant n-1$; il existe alors un hyperplan H ($\dim H = n-1$) contenant $V_1, \ldots, V_n$. Soit V'_{n+1} le projeté orthogonal de V_{n+1} sur H : avec $H^\perp = \mathbb{R}W$ et $\|W\| = 1$, on a :

$$V'_{n+1} = V_{n+1} - \langle W \mid V_{n+1} \rangle W.$$

On vérifie facilement que le système $(V_1, \ldots, V_n, V'_{n+1})$ est obtusangle. En effet, les conditions $\langle V_i \mid V_j \rangle < 0$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sont acquises par hypothèse et on a de plus pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\langle V_i \mid V'_{n+1} \rangle = \langle V_i \mid V_{n+1} \rangle < 0.$$

Puisque $(V_1, \ldots, V_n, V'_{n+1})$ est un système obtusangle de l'espace eucliden H, d'après le 2), on a $\dim H \geqslant n$ ce qui est bien sûr une contradiction. En conséquence, $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre.

4) a) Posons $F = \text{Vect}(V_1, \ldots, V_p)$.

D'après 2), $\dim F \geqslant p-1$ et évidemment $\dim F \leqslant p$ donc $\dim F = p-1$ ou p.

b) Soit $(V_1, \ldots, V_{p+1})$ un système obtusangle de F_p avec $\dim F_p = p$.

S'il existait V_{p+2} tel que $(V_1, \ldots, V_{p+2})$ soit obtusangle, d'après 3)b), $(V_1, \ldots, V_{p+1})$ serait libre, ce qui est impossible car $V_1, \ldots, V_{p+1}$ sont dans F_p et $\dim F_p = p$.

Partie B

Pour tout i, j de $[\![1, n+1]\!]$, $\|V_i\| = 1$ et, si $i \neq j$, $\langle V_i \mid V_j \rangle = \cos\varphi$.

1) $(V_1, \ldots, V_{n+1})$ étant lié, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i V_i = 0 \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0),$$

donc :

$$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle V_i \mid V_j \rangle = 0$$

c'est-à-dire :

$$(S) \left\{ \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i \right) \cos\varphi + \lambda_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1. \right. \qquad (E_j)$$

En faisant la somme des $n+1$ équations, on obtient :

$$(1 + n\cos\varphi) \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \right) = 0.$$

Supposons $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$. En combinant avec l'équation (E_j), il vient :

$$\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i\right)(1-\cos\varphi)=0.$$

Or $\cos\varphi<0$ donne $1-\cos\varphi\neq 0$ d'où enfin :

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i = 0$$

soit aussi $\lambda_j=0$ et ceci pour tout j, ce qui est impossible.

En conséquence, on a :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = -\frac{1}{n}.$$

Le système (S) s'écrit alors :

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i - n\lambda_j = 0, \quad 1\leqslant j\leqslant n+1$$

soit aussi matriciellement :

$$A_{n+1}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{n+1}\end{bmatrix}=0 \quad \text{avec} \quad A_{n+1}=\begin{bmatrix}-n & & (1)\\ & \ddots & \\ (1) & & -n\end{bmatrix}\in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Calculons le déterminant d'ordre n :

$$\det A_n = \begin{vmatrix}-n & 1 & \dots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & -n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & \dots & \dots & \dots & -1\\ 1 & -n & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}-1 & \dots & \dots & \dots & -1\\ 0 & -n-1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n-1\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n(n+1)^{n-1}\neq 0.$$

On en déduit $\operatorname{rg} A_{n+1}=n$ et, en conséquence la solution générale de (S) est :

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})=\lambda(1,\dots,1),$$

d'où :

$$V_1+V_2+\dots+V_{n+1}=0.$$

2) Soit $(V_1,\dots,V_p)$ un système obtusangle tel que $\|V_i\|^2=1$, $\langle V_i \mid V_j\rangle=\cos\psi$.

$\|V_1+\dots+V_p\|^2=\sum_{i=1}^{p}\left\|V_i^2\right\|+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}\langle V_i\mid V_j\rangle = p+p(p-1)\cos\psi\geqslant 0$ donc $1+(p-1)\cos\psi\geqslant 0$.

En cas d'égalité, $(V_1,\dots,V_p)$ est lié avec $V_1+\dots+V_p=0$, donc $\operatorname{rg}(V_1,\dots,V_p)=p-1$, (cf. A.4)a)).

Réciproquement, si $\text{rg}\left(V_1, \ldots, V_p\right) = p-1$, d'après le résultat de la question précédente appliqué dans l'espace $F = \text{Vect}\left(V_1, \ldots, V_p\right)$ on obtient :

$$\cos\psi = -\frac{1}{p-1} \quad \text{et donc} \quad 1+(p-1)\cos\psi = 0.$$

Ainsi $1+(p-1)\cos\psi \geqslant 0$ devient une égalité si et seulement si $\left(V_1, \ldots, V_p\right)$ est lié.

Partie C

1) Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, soit $\mathcal{R}(p)$ la propriété suivante. Si $\left(V_1, \ldots, V_p\right)$ est un système obtusangle de p vecteurs et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0$$

alors les λ_i sont tous de même signe.

On vérifie que $\mathcal{R}(2)$ est vraie. En effet, $\left(V_1, V_2\right)$ étant obtusangle, on a :

$$\left\langle V_1 \,\middle|\, V_2\right\rangle < 0 \quad \text{et} \quad -\| V_2 \|^2 < 0$$

donc, en observant que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$ donne :

$$\lambda_1 \left\langle V_1 \,\middle|\, V_2\right\rangle = -\lambda_2 \| V_2 \|^2$$

on obtient que λ_1 et λ_2 sont de même signe.

Montrons alors que $\mathcal{R}(p-1) \Rightarrow \mathcal{R}(p)$, $(p \geqslant 3)$.

On a déjà vu (cf. A.2)) que $\left(V_1, \ldots, V_p\right)$ étant obtusangle, en appelant, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, V_i' le projeté orthogonal de V_i sur $H = V_p^{\perp}$, le système $\left(V_1', \ldots, V_p'\right)$ est obtusangle.

Alors si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0$$

en projetant orthogonalement sur H, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i' = 0$$

et, d'après $\mathcal{R}(p-1)$, on en déduit que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, sont tous de même signe, puis la relation :

$$-\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \left\langle V_i \,\middle|\, V_p\right\rangle = \lambda_p \| V_p \|^2$$

montre, avec $-\left\langle V_i \,\middle|\, V_p\right\rangle > 0$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, et $\| V_p \|^2 > 0$, que λ_p est également de ce signe.

On a ainsi montré que $\mathcal{R}(p-1) \Rightarrow \mathcal{R}(p)$ et puisque $\mathcal{R}(2)$ est vraie, le principe de récurrence montre que $\mathcal{R}(p)$ est vraie pour tout $p \geqslant 2$.

Les λ_i étant de même signe, on a :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = |\lambda_i| \quad \text{ou} \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = -|\lambda_i|$$

donc, au besoin en multipliant par -1 :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0 \quad \text{donne} \quad \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i|\, V_i = 0.$$

2) Précisons la propriété précédente en montrant que si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont p réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0$$

alors les λ_i sont soit tous nuls, soit tous non nuls (et de même signe). Appelons $\mathcal{R}'(p)$ la propriété ainsi obtenue.

$\mathcal{R}'(2)$ est vraie car, avec $\lambda_1 \langle V_1 \mid V_2 \rangle = -\lambda_2 \| V_2 \|^2$, on voit que l'un des deux réels λ_1, λ_2 est nul si et seulement si l'autre l'est également.

Montrons que $\mathcal{R}'(p-1) \Rightarrow \mathcal{R}'(p)$.

Si $\lambda_p = 0$, la relation $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0$ se réduit à $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i = 0$.

Or on sait que $(V_1, \dots, V_{p-1})$ est libre (cf. A.4)a)) donc cette deuxième relation donne :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{p-1} = 0.$$

Finalement les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont tous nuls.

Si $\lambda_p \neq 0$, la relation :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i = -\lambda_p V_p$$

montre que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, sont non tous nuls donc, d'après $\mathcal{R}'(p-1)$, la relation :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i V_i' = 0$$

donne que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, sont tous non nuls et il en est donc de même pour λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Finalement, on a montré que $\mathcal{R}'(p-1) \Rightarrow \mathcal{R}'(p)$ et puisque $\mathcal{R}'(2)$ est vraie, il en résulte que :

$$\mathcal{R}'(p) \text{ est vraie pour tout } p \geqslant 2.$$

Si $(V_1, \dots, V_n)$ est une base obtusangle de E, les conditions $\langle V \mid V_i \rangle > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ donnent, qu'en posant $V_{n+1} = -V$, le système $(V_1, \dots, V_n, V_{n+1})$ est obtusangle.

Alors la relation :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$$

s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i V_i = 0 \quad \text{avec } \lambda_{n+1} = 1$$

et, d'après $\mathcal{R}'(n+1)$, on en déduit $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Partie D

1) Remarquons d'abord que si σ est une permutation de $[\![1, p]\!]$, la matrice :

$$MG(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)})$$

se déduit de :

$$MG(e_1, \dots, e_p)$$

par la permutation σ sur les lignes et la permutation σ sur les colonnes. On a donc :

$$\operatorname{rg} MG(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) = \operatorname{rg} MG(e_1, \dots, e_p).$$

Si $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) = 0$, on a $MG(e_1, \dots, e_p) = 0$ et la propriété est évidemment vérifiée.

On suppose maintenant $r = \operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p) \geqslant 1$. Alors on peut extraire de $(e_1, \dots, e_p)$ un système libre de r vecteurs et à une permutation près, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_r)$ est libre. Dans ce cas, $MG(e_1, \dots, e_r)$ est la matrice, sur la base $(e_1, \dots, e_r)$ de $F = \operatorname{Vect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, du produit scalaire. On a donc :

$$\det\Big(MG(e_1, \dots, e_r)\Big) > 0$$

et, puisque cette matrice est extraite de $MG(e_1, \dots, e_p)$, on en déduit :

$$\operatorname{rg} MG(e_1, \dots, e_p) \geqslant r.$$

D'autre part, pour tout $j \in [\![r+1, p]\!]$ on a alors :

$$e_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j,k} e_k$$

ce qui donne, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j,k} \langle e_i \mid e_k \rangle$$

et, en notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A :

$$C_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{j,k} C_k.$$

Il en résulte $\operatorname{rg} MG(e_1, \dots, e_p) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) \leqslant r$, d'où finalement :

$$\operatorname{rg} MG(e_1, \dots, e_p) = r = \operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p).$$

2) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, il existe $P \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^tPDP \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. De plus, la positivité de A équivaut à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geqslant 0.$$

Posons alors $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, $Q = \Delta P$, et soit $V_1, V_2, \dots, V_n$ les vecteurs colonnes de Q.

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire canonique, on obtient :

$$A = {}^tQQ = \big[\langle V_i \mid V_j \rangle\big]$$

si bien que les conditions $a_{ij} < 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$ traduisent que le système $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est obtusangle.

D'après la question précédente (D.1)), on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(V_1, \dots, V_n)$ et, d'après le A.4)a), on a $\operatorname{rg}(V_1, \dots, V_n) = n$ ou $n-1$, donc $\operatorname{rg} A = n$ ou $n-1$. D'autre part, puisque $(V_1, \dots, V_n)$ est obtusangle, chaque V_i est non nul et :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = \| V_i \|^2 > 0.$$

4 Matrices symétriques réelles, définies-positives : conditions de Sylvester

Notations :

$$S_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\right\} ;$$

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \left\{M \in S_n(\mathbb{R}) \ /\ \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geqslant 0\right\} ;$$

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \left\{M \in S_n(\mathbb{R}) \ /\ \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \ \Rightarrow\ {}^tXMX > 0\right\}.$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

On pose $B = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\1\leqslant j\leqslant n-1}}$ et $A = \begin{bmatrix} B & C \\ {}^tC & a_{nn}\end{bmatrix}$ donc :

$$B \in S_{n-1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que A est définie-positive si et seulement si B est définie-positive et $\det A > 0$.

2) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$\Delta_k = \det \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\1\leqslant j\leqslant k}}$$

Montrer que A est définie-positive si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_k > 0$.

Solution

1) Soit $(i) : A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $(ii) : B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et $\det A > 0$.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est bien connue.

- Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, si $X \neq 0$ on a :

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0\right\}$$

donc ${}^tYAY > 0$, c'est-à-dire ${}^tXBX > 0$. En conséquence, $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

- Puisqu'elle est symétrique, définie-positive, A est la matrice d'un produit scalaire et il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ d'où on déduit :

$$\det A = \frac{1}{(\det P)^2} > 0.$$

> Rappelons que l'existence de P correspond à l'existence de bases orthonormales dans un espace euclidien.
>
> La positivité stricte de A peut aussi se déduire du fait ques les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

Montrons maintenant $(ii) \Rightarrow (i)$.

L'hypothèse $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ nous donne l'existence de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP = I_{n-1}$. Posons alors $U = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, on a $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $U^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, et :

$${}^tUAU = \begin{bmatrix} {}^tPBP & {}^tPC \\ {}^tCP & a_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & C_1 \\ {}^tC_1 & a_{nn}\end{bmatrix} \quad (\text{en posant } C_1 = {}^tPC).$$

> Lorsque deux matrices A et A' de $S_n(\mathbb{R})$ sont congruentes, l'une est positive (resp. définie-positive) si et seulement si l'autre l'est.

Posons $A' = {}^tUAU$, ces deux matrices A et A' sont congruentes, donc pour que A soit définie-positive, il faut et il suffit que A' le soit aussi.

Posons alors $V = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $V^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et il vient :

$$ {}^tVA'V = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - {}^tC_1C_1 \end{bmatrix}. $$

Ainsi les matrices A, A' et $A'' = {}^tVA'V$ sont congruentes donc, pour prouver que A est définie-positive, il suffit de vérifier que A'' l'est également.

Avec $\det A' = (\det P)^2 \det A$ et $\det A'' = \det A'$, l'hypothèse $\det A > 0$ donne $\det A'' > 0$, c'est-à-dire :

$$ a_{nn} - {}^tC_1C_1 > 0, $$

donc la matrice diagonale A'' est définie-positive et il en est de même pour A.

2) La propriété est vraie pour $n = 1$ et, d'après le 1), si elle est vraie pour $n-1$, elle l'est aussi pour n. On obtient donc le résultat par récurrence.

5 Signature d'une forme quadratique Application aux conditions de Sylvester

Étant donné $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle d'ordre $n \geqslant 1$, on pose :

$$ r = \mathrm{Card}\left\{ \lambda \in \mathrm{Sp}\, A \,/\, \lambda > 0 \right\} \quad \text{et} \quad s = \mathrm{Card}\left\{ \lambda \in \mathrm{Sp}\, A \,/\, \lambda < 0 \right\}. $$

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n étant rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on note q_A la forme quadratique sur E telle que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q_A$.

1) Montrer qu'il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_{r+s}$ formes linéaires indépendantes sur E telles que :

$$ q_A = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \varphi_{r+i}^2. $$

(Si $r = 0$, la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est vide et la somme :

$$ \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^2 $$

est remplacée par 0. De même si $s = 0$.)

2) On suppose qu'il existe $\psi_1, \ldots, \psi_{r'}, \psi_{r'+1}, \ldots, \psi_{r'+s'}$ formes linéaires indépendantes telles que :

$$ q_A = \sum_{i=1}^{r'} \psi_i^2 - \sum_{i=1}^{s'} \psi_{r'+i}^2. $$

Montrer que $r' = r$, $s' = s$.

Indication. On pourra compléter $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+s})$ et $(\psi_1, \ldots, \psi_{r's'})$ en des bases $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\psi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E^* puis, $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\varepsilon'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désignant les bases antéduales, introduire les sous-espaces :

$$ F = \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\right), \quad G = \mathrm{Vect}\left(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n\right), $$
$$ F' = \mathrm{Vect}\left(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{r'}\right), \quad G' = \mathrm{Vect}\left(\varepsilon'_{r'+1}, \ldots, \varepsilon'_n\right). $$

Définition. Le couple (r, s) est appelé signature de la forme quadratique q_A et on note :

$$\operatorname{sgn} q_A = (r, s).$$

3) a) Étant donné q la forme quadratique sur E de forme polaire Φ, et F sous-espace vectoriel de E, on note :

$$F^o = \left\{x \in E \;/\; \forall\, y \in E, \Phi(x, y) = 0\right\}.$$

Montrer que F^o est un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$\dim F^o \geqslant n - \dim F.$$

On suppose la forme quadratique $q_{|F}$ définie-positive, montrer que :

$$E = F \oplus F^o.$$

b) Soit (r, s) la signature de q. Montrer que r est la dimension maximum des sous-espaces F de E tels que la restriction $q_{|F}$ soit définie-positive.

4) Donner une nouvelle démonstration des conditions de Sylvester caractérisant les matrices symétriques réelles définies-positives (cf. thème 4 précédent).

Solution

1) Munissons E de la structure euclidienne telle que la base $\mathcal{B}$ soit orthonormale. On a alors $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ où u est l'endomorphisme symétrique de la forme quadratique q. On sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = \left(e_i'\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ formée de vecteurs propres de u :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u\left(e_i'\right) = \lambda_i e_i'$$

et dans cette base, pour tout $x \in E$, avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$, on a :

$$q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2.$$

On peut supposer que les λ_i ont été indexées de façon que :

$$\lambda_i > 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

$$\lambda_i < 0 \quad \text{pour} \quad r + 1 \leqslant i \leqslant r + s,$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{pour} \quad r + s + 1 \leqslant i \leqslant n,$$

en notant $e_1'^*, \ldots, e_n'^*$ les formes coordonnées associées à la base $\mathcal{B}'$, il suffit alors de poser :

$$\varphi_i = \sqrt{\lambda_i}\, e_i'^* \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

$$\text{et} \quad \varphi_i = \sqrt{-\lambda_i}\, e_i'^* \quad \text{pour} \quad r + 1 \leqslant i \leqslant r + s.$$

pour obtenir une famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_{r+s})$ telle que :

$$q_A = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i^2 - \sum_{i=1}^{s} \varphi_{r+i}^2.$$

2) $\left(\varphi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant r+s}$ et $\left(\psi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant r'+s'}$ sont des familles libres du dual E^* de E, elles peuvent donc être complétées en des bases $\left(\varphi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\left(\psi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E^* et on note alors $\left(\varepsilon_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\left(\varepsilon_i'\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ leurs bases antéduales respectives.

Enfin, on pose :

$$F = \text{Vect}\left(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\right), \qquad G = \text{Vect}\left(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n\right),$$
$$F' = \text{Vect}\left(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{r'}\right), \qquad G' = \text{Vect}\left(\varepsilon'_{r'+1}, \dots, \varepsilon'_n\right).$$

Tout x de E s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} X_i\, \varepsilon_i \quad \text{avec} \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!], X_i = \varphi_i(x)$$

$$\text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{n} X'_i\, \varepsilon'_i \quad \text{avec} \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!], X'_i = \psi_i(x).$$

Donc, pour $x \in F \cap G'$, on a :

$$q_A(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad q_A(x) = -\sum_{i=1}^{s'} \psi_{r'+i}(x)^2 \leqslant 0$$

ce qui donne $q_A(x) = 0$ puis :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \varphi_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\varepsilon_i = 0.$$

On a ainsi montré que $F \cap G' = \{0\}$ donc $F + G' = F \oplus G'$ et la relation $\dim\left(F \oplus G'\right) \leqslant \dim E$ s'écrit :

$$r + n - r' \leqslant n \quad \text{c'est-à-dire} \quad r \leqslant r'.$$

Symétriquement, on a $F' \cap G = \{0\}$ et $r' \leqslant r$ d'où finalement $r = r'$.

Enfin, en remarquant que :

$$\text{mat}_{(\varepsilon_i)}\, q_A = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{mat}_{(\varepsilon'_i)}\, q_A = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{s'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on obtient $r + s = r' + s' = \text{rg}\, q_A$ et $r = r'$ donne $s = s'$.

3) a) Si $F = \{0\}$, on a évidemment $F^o = E$ et donc $\dim F^o \geqslant n - \dim F$.
On suppose maintenant $F \neq \{0\}$ donc $\dim F = p \geqslant 1$.

E étant rapporté à une base $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ obtenue en complétant une base $\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de F, introduisons les formes linéaires :

$$\Phi_i \;:\; x \mapsto \Phi\left(x, e_i\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

La linéarité de Φ par rapport à sa deuxième variable donne :

$$F^o = \bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\, \Phi_i$$

donc F^o est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - \text{rg}\left(\Phi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et puisque $\text{rg}\left(\Phi_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p} \leqslant p$, il vient $\dim F^o \geqslant n - p$, soit aussi $\dim F + \dim F^o \geqslant \dim E$.

Pour $x \in F \cap F^o$, on a $\Phi(x, x) = 0$ c'est-à-dire $q(x) = 0$ donc, si on suppose $q_{|F}$ définie-positive, $q(x) = 0$ avec $x \in F$ donne $x = 0$. En conséquence, lorsque $q_{|F}$ est définie-positive, on a $F \cap F^o = \{0\}$ et, puisque $\dim F + \dim F^o \geqslant \dim E$, il vient finalement :

$$E = F \oplus F^o.$$

b) Nous notons $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E et $Q^+(E)$ (resp. $Q^{++}(E)$) l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies-positives) sur E.

Si $r = 0$, la forme quadratique q est négative et il n'existe aucun sous-espace F non réduit à $\{0\}$ tel que $q_{|F}$ soit définie-positive. Donc, dans ce cas :

$$\max\left\{\dim F \,/\, q_{|F} \in \mathcal{Q}^{++}(F)\right\} = 0 = r.$$

Dans la suite, on suppose $r \geqslant 1$.

D'après la question 1), il existe F sous-espace de dimension r tel que $q_{|F} \in \mathcal{Q}^{++}(F)$: avec les notations de cette question, il suffit de prendre $F = \operatorname{Vect}\left(e'_1, \ldots, e'_r\right)$.

Soit maintenant F un sous-espace de E tel que $\dim F = p$ et $q_{|F} \in \mathcal{Q}^{++}(F)$. D'après le a) précédent, on a $E = F \oplus F^o$.

Puisque $q_{|F}$ est définie-positive, il existe une base $\mathcal{B}_F$ de F dans laquelle la matrice de $q_{|F}$ est I_p et en posant $\operatorname{sgn} q_{|F^o} = \left(r', s'\right)$, il existe une base $\mathcal{B}_{F^o}$ de F^o dans laquelle la matrice $q_{|F^o}$ est :

$$\begin{pmatrix} I_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{s'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}).$$

Soit $\mathcal{B}_E$ la base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^o$ obtenue comme «réunion» de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_{F^o}$. Sachant que $\forall (x, y) \in F \times F^o$, $\Phi(x, y) = 0$, on obtient :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_E} q = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{s'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\operatorname{sgn} q = \left(p + r', s'\right)$ ce qui montre que $r = p + r'$, soit aussi $p \leqslant r$.

Ainsi on a bien :

$$r = \max\left\{\dim F \,/\, q_{|F} \in \mathcal{Q}^{++}(F)\right\}.$$

4) Étant donné $A = \left[a_{ij}\right] \in S_n(\mathbb{R})$, on pose $B = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$, $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ et il s'agit de montrer que A est définie-positive : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \det A > 0.$$

Reprenons les notations du 1) : $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} q_A$, $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ base de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

En posant $F = \operatorname{Vect}\left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, B est la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}_F = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ de la restriction $q_{A|F}$ de q_A à F et il est clair que q_A définie-positive implique $q_{A|F}$ définie-positive. Donc, puisque l'on sait que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donne $\det A > 0$, il vient :

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \det A > 0.$$

Réciproquement, on suppose $B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et $\det A > 0$. On a alors $q_{A|F} \in \mathcal{Q}^{++}(F)$ donc, d'après la question 3), la signature de q_A est (r, s) avec $r \geqslant n - 1$. Dans le cas $r = n - 1$ et donc $s = 0$ ou 1, on aurait $\det A \leqslant 0$, ce qui est à rejeter, donc $r = n$ et q_A est définie-positive. On a ainsi montré que :

$$B \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \det A > 0 \Rightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Comme on l'a vu dans le thème précédent, on démontre alors par récurrence les conditions de Sylvester, à savoir :

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in [\![1, n]\!], \Delta_k > 0$$

où on a posé $\Delta_k = \det\left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$.

6 Une application des conditions de Sylvester

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice symétrique réelle d'ordre n : $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'équivalence des deux propositions :

(1) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} > 0$;

(2) il existe P symétrique réelle définie-positive : $P \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$ et D diagonale à éléments diagonaux strictement positifs telles que :

$$A = DP + PD.$$

Solution

(2) $\Rightarrow$ (1)

Posons $P = [p_{ij}]$ et $D = \text{diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$, il vient :

$$DP + PD = \left[(d_i + d_j) p_{ij} \right].$$

Sachant que P définie-positive donne $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_{ii} > 0$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} = 2d_i\, p_{ii} > 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Étant donné $P \in S_n(\mathbb{R})$, soit $\Delta_k = \det \,[p_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$, on sait que P est définie-positive si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \Delta_k > 0 \quad \text{(conditions de Sylvester)}.$$

La condition $A = DP + PD$ équivaut à :

$$(C) \begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], & 2d_i\, p_{ii} = a_{ii} \\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, & i < j \Rightarrow (d_i + d_j) p_{ij} = a_{ij} \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante.

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} > 0,$$

il existe un choix de $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$ tel que la matrice $P = [p_{ij}] \in S_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} p_{ii} = \dfrac{a_{ii}}{2d_i} & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \\ p_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{d_i + d_j} & \text{pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{cases}$$

soit définie-positive.

$\mathcal{P}(1)$ est vraie car P se réduit à la matrice uni-élément :

$$\left[\frac{a_{11}}{2d_1} \right]$$

qui est définie-positive quel que soit $d_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

> Ce point est inutile dans le raisonnement par récurrence mais l'idée fondamentale permettant de prouver l'héridité de la propriété $\mathcal{P}$ est déjà présente.

On choisit par exemple $d_1 = 1$, alors :

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}}{2} & \dfrac{a_{12}}{1+d_2} \\ \dfrac{a_{12}}{1+d_2} & \dfrac{a_{22}}{2d_2} \end{bmatrix}.$$

Pour tout $d_2 > 0$, on a :

$$\operatorname{Tr} P = \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2d_2} > 0 \quad \text{et} \quad \det P = \frac{a_{11}a_{22}}{4d_2} - \frac{a_{12}^2}{\left(1+d_2\right)^2}$$

donc $\lim\limits_{d_2 \to 0} \det P = +\infty$ et pour d_2 assez petit on a $\det P > 0$.

Les conditions $\operatorname{Tr} P > 0$ et $\det P > 0$ assurent que $\operatorname{Sp}(P) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc que P est définie-positive.

Montrons maintenant que $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} > 0$ et, pour $\left(d_1, \ldots, d_n\right) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, la matrice $P = \left[p_{ij}\right] \in S_n(\mathbb{R})$ définie par les relations (C).

Puisque $\widetilde{A} = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifie (1), d'après $\mathcal{P}(n-1)$, il existe un choix de $\left(d_1, \ldots, d_{n-1}\right) \in \mathbb{R}_+^{*n-1}$ tel que la matrice $\widetilde{P} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{P} = \left[p_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-1}}$ soit définie-positive.

On a alors :

$$P = \begin{bmatrix} & & & p_{1n} \\ & \widetilde{P} & & \vdots \\ & & & \vdots \\ p_{11} & \ldots & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

et, en notant P_{ij} les cofacteurs, il vient :

$$\det P = p_{nn} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} p_{in} P_{in}.$$

En développant chaque cofacteur P_{in} par rapport à sa dernière ligne, on obtient :

$$P_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}\, \alpha_{ij}$$

où les scalaires α_{ij} (cofacteur de p_{nj} dans P_{in}) ne dépendent que des coefficients de $\widetilde{P}$ (c'est-à-dire des p_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$) et sont donc indépendants de d_n.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \det P &= p_{nn} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} p_{in}\, p_{jn}\, \alpha_{ij} \\ &= \frac{a_{nn}}{2d_n} \det \widetilde{P} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{in}\, a_{jn}\, \alpha_{ij}}{\left(d_i + d_n\right)\left(d_j + d_n\right)} \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{d_n \to 0} \det P = +\infty$, on peut donc choisir d_n tel que $\det P > 0$.

Alors, d'après les conditions de Sylvester, $\widetilde{P}$ définie-positive et $\det P > 0$ donnent que P est définie-positive. On a ainsi prouvé $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$ ce qui, avec le principe de récurrence, achève de montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

CHAPITRE 5

Intégration – Suites et séries de fonctions Séries entières Séries de Fourier

Sujets d'oraux 292

Thèmes d'étude – Problèmes 358

Sujets d'oraux

A Intégrabilité

Ex. 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$, positive et $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si g est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Pour une fonction f, continue, positive sur $[1,+\infty[$, l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ est équivalente à l'existence de :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

soit aussi au fait que la fonction $F\ :\ x\mapsto \displaystyle\int_1^x f$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

La première chose à remarquer est donc que g est, tout comme f, continue et positive sur $[1,+\infty[$, puis que :

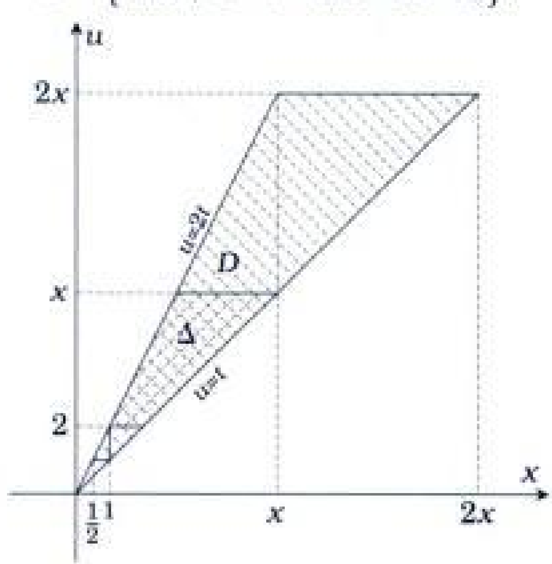
$$G(x) = \int_1^x g$$

fait apparaître une intégrale double qu'il suffirait de transformer avec le théorème de Fubini pour la relier à :

$$F(x) = \int_1^x f.$$

Formons $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \left(\int_t^{2t}\frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \iint_{\mathcal{D}}\frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$, où on a posé :

$$\mathcal{D} = \{(t,u)\ /\ 1\leqslant t\leqslant x,\ t\leqslant u\leqslant 2t\}.$$



Ce compact $\mathcal{D}$ ne se prêtant pas bien à la permutation des intégrations, commençons par en effectuer un encadrement par deux compacts Δ' et Δ qui, eux, s'y prêterons mieux.

Posons :

$$\Delta' = \left\{(t,u) \,/\, 2 \leqslant u \leqslant x, \frac{u}{2} \leqslant t \leqslant u\right\}$$

$$\text{et} \quad \Delta = \left\{(t,u) \,/\, 1 \leqslant u \leqslant 2x, \frac{u}{2} \leqslant t \leqslant u\right\}$$

on a alors $\Delta' \subset \mathcal{D} \subset \Delta \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\times [1,+\infty[$, et, puisque $(t,u) \mapsto \frac{f(u)}{t}$ est positive, il en résulte :

$$\iint_{\Delta'} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \iint_{\Delta} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de Fubini donne :

$$\iint_{\Delta} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_1^{2x} f(u)\left(\int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}u = \ln 2 \int_1^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\text{et} \quad \iint_{\Delta'} \frac{f(u)}{t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_2^{x} f(u)\left(\int_{\frac{u}{2}}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}u = \ln 2 \int_2^{x} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Posons $F(x) = \int_1^x f(u)\,\mathrm{d}u$, on obtient :

$$\big(F(x) - F(2)\big)\ln 2 \leqslant G(x) \leqslant F(2x)\ln 2.$$

Si F est majorée sur $[1,+\infty[$, alors l'inégalité (i) : $G(x) \leqslant F(2x)\ln 2$ montre que G est majorée.

Si G est majorée sur $[1,+\infty[$, alors l'inégalité (ii) : $F(x) \leqslant F(2) + \frac{G(x)}{\ln 2}$ montre que F est majorée.
Ainsi f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si g l'est aussi.

Ex. 2

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}\,.$$

Étudier l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$.

> L'hypothèse fournie ne permet pas de donner une majoration globale de f par une fonction intégrable. On peut donc penser à une majoration «par intervalle» c'est-à-dire à l'introduction d'une série.

Puisque f est positive, son intégrablité sur $[1,+\infty[$ est équivalente à la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \int_{n^2}^{(n+1)^2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^{\frac{3}{2}}}{x^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\text{donc} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+1}{n^3} + n^{\frac{3}{2}} \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+1}{n^3} + n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\text{ou encore} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{2n+1}{n^3} + \frac{(2n+1)}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^2}.$$

Avec $\dfrac{2n+1}{n^3} \sim \dfrac{2}{n^2}$ et $\dfrac{2n+1}{n^{\frac{1}{2}}(n+1)^2} \sim \dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ on obtient $v_n \sim \dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ puis celle de $\sum u_n$ par domination.

Enfin, la convergence de $\sum u_n$ donne l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

Ex. 3

E désigne la fonction «partie entière».

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{2n}{k}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)$.

> On voit que l'on a ici affaire à une somme de Riemann mais il faut prendre garde au fait qu'elle est relative à une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I semi-ouvert. Dans cette situation il va falloir :
>
> 1) prouver l'intégrabilité de la fonction f sur I ;
>
> 2) donner une démonstration directe du fait que les sommes de Riemann convergent vers $\displaystyle\int_I f$;
>
> 3) calculer cette intégrale $\displaystyle\int_I f$.

1) Considérons la fonction $f \ : \ x \mapsto E\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2E\left(\dfrac{1}{x}\right), \ x \in \,]0, 1]$.

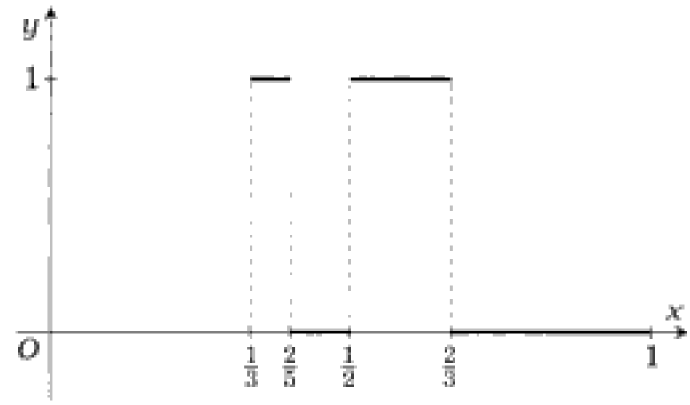
f est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

En effet, pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $p \leqslant \dfrac{2}{x} < p+1$ c'est-à-dire $\dfrac{2}{p+1} < x \leqslant \dfrac{2}{p}$ on a $\dfrac{p}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} < \dfrac{p+1}{2}$ donc :

$$E\left(\frac{2}{x}\right) = p \ , \ E\left(\frac{1}{x}\right) = E\left(\frac{p}{2}\right) \ \text{ et } \ f(x) = p - 2E\left(\frac{p}{2}\right).$$

Ainsi, pour $p = 2q$, $f(x) = 0$ sur $\left]\dfrac{2}{2q+1}, \dfrac{1}{q}\right]$

et pour $p = 2q+1$, $f(x) = 1$ sur $\left]\dfrac{1}{q+1}, \dfrac{2}{2q+1}\right]$



> Remarque. Bien qu'elle soit constante par morceaux, f n'est pas une fonction en escalier sur $]0,1]$ puisque pour une telle fonction il doit exister $\alpha \in]0,1]$ tel que $f(x) = 0$ sur $]0,\alpha[$.

Puisqu'elle est positive et majorée par 1, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$.

2) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$.

Posons $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\frac{2n}{k}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)$ et formons $\int_0^1 f - u_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f - u_n\right| &\leqslant \int_0^{\frac{1}{p}} f + \frac{1}{n}\sum_{\frac{1}{n}\leqslant\frac{k}{n}<\frac{1}{p}} f\left(\frac{k}{n}\right) + \left|\int_{\frac{1}{p}}^1 f - \frac{1}{n}\sum_{\frac{1}{p}\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{n}E\left(\frac{n}{p}\right) + \left|\int_{\frac{1}{p}}^1 f - \frac{1}{n}\sum_{\frac{1}{p}\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{p} + \left|\int_{\frac{1}{p}}^1 f - \frac{1}{n}\sum_{\frac{1}{p}\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \qquad (i)\end{aligned}$$

Posons $k_p = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,/\, \frac{k}{n} \geqslant \frac{1}{p}\right\}$, alors $\sigma = \left(\frac{1}{p}, \frac{k_p}{n}, \frac{k_p+1}{n}, \ldots, 1\right)$ est une subdivision de $\left[\frac{1}{p}, 1\right]$, de pas $|\sigma| = \frac{1}{n}$ car $\frac{k_p}{n} - \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{n}$, donc, puisque f est continue par morceaux sur ce segment, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{k_p}{n} - \frac{1}{p}\right)f\left(\frac{k_p}{n}\right) + \sum_{k=k_p+1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{1}{p}}^1 f.$$

Or $0 \leqslant \frac{k_p}{n} - \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{n}$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{k_p}{n} - \frac{1}{p}\right)f\left(\frac{k_p}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{k_p}{n}\right) = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=k_p}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{1}{p}}^1 f. \qquad (ii)$$

À tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ puis, cet entier p étant fixé, d'après (*ii*) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \int_{\frac{1}{p}}^{1} f - \frac{1}{n} \sum_{\frac{1}{p} \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, d'après (*i*), $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \int_0^1 f - u_n \right| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f.$$

3) Il reste à calculer $\int_0^1 f$.

D'après l'étude de f, on a $\int_0^1 f = \sum_{p=2}^{+\infty} \int_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{2p-1}} \mathrm{d}x = 2 \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p}$, soit :

$$\int_0^1 f = 2 \sum_{p=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = 2\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} - 1 + \frac{1}{2}\right)$$

c'est-à-dire $\int_0^1 f = 2 \ln 2 - 1.$

(B) Suites de fonctions

Ex. 4

Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe S_n segment de $\mathbb{R}$ tel que k_n est nulle en dehors de S_n ;

(2) $\int_{\mathbb{R}} k_n = 1$;

(3) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \delta \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n \leqslant \varepsilon$.

Étant donné $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nulle en dehors d'un segment, on pose :

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) k_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier le cas où $k_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$ si $x \in [-1, 1]$ et $k_n(x) = 0$ sinon.

1) Il est ici nécessaire d'effectuer une majoration uniforme de $|f_n(x) - f(x)|$. Il est donc judicieux d'écrire également $f(x)$ sous la forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$ de façon à exprimer la différence $f_n(x) - f(x)$ sous la forme d'une seule intégrale.

La condition $\int_{\mathbb{R}} k_n = 1$ donne $c_n = \dfrac{1}{\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x}$.

Or $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$ (poser $x = \sin t$). On reconnaît une intégrale de Wallis, d'où :

$$c_n = \frac{1}{2W_{2n+1}} \quad \text{avec} \quad W_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Si $\delta \geqslant 1$ on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n = 0$. On peut donc, pour la vérification de (3), se limiter à $0 < \delta < 1$.

Sous cette condition, on a $\int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n = 2c_n \int_{\delta}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$, donc :

$$0 < \int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n \leqslant \frac{\left(1-\delta^2\right)^n}{W_{2n+1}}.$$

En posant $u_n = \dfrac{\left(1-\delta^2\right)^n}{W_{2n+1}}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1-\delta^2\right)\dfrac{2n+3}{2n+2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\delta^2 < 1$ ce qui assure que u_n est le terme général d'une série à termes positifs convergente. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ce qui montre, avec $\int_{-\infty}^{-\delta} k_n + \int_{\delta}^{+\infty} k_n \leqslant u_n$, que la suite $\left(k_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à l'hypothèse (3).

D'après le 1), on peut maintenant affirmer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{2W_{2n+1}} \int_{-1}^{1} f(x-t)\left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable défini par $u = x - t$ donne aussi :

$$f_n(x) = \frac{1}{2W_{2n+1}} \int_{x-1}^{x+1} f(u)\left(1-(x-u)^2\right)^n \mathrm{d}u$$

et cette expression montre que les f_n sont des fonctions polynômes.

Ex. 5

1) Existe-t-il une fonction f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f^2(t)}\,\mathrm{d}t \; ? \tag{1}$$

2) a) Étudier la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 0.$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f_n^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

b) Que peut-on dire de la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$?

2) a) L'étude de la suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ se ramène à celui de la série de fonctions de terme général $f_n - f_{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_{k-1}(x)\right).$$

Étudions la série de fonctions de terme général :

$$u_k \ : \ x \mapsto f_k(x) - f_{k-1}(x), \quad k \geqslant 1.$$

Avec $u_1(x) = f_1(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |u_1(x)| \leqslant 1 + \left|\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc $\|u_1\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A$ où on a posé $A = 1 + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $k \geqslant 1$, formons $f_{k+1}(x) - f_k(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\left(\frac{1}{1+f_k^2(t)} - \frac{1}{1+f_{k-1}^2(t)}\right)\mathrm{d}t$ ce qui nous amène à considérer la fonction $\varphi \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Avec $\varphi'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ on obtient $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \left|\int_0^x e^{-t^2}\left|f_k(t) - f_{k-1}(t)\right|\mathrm{d}t\right|.$$

Ainsi, en supposant $u_k = f_k - f_{k-1}$ bornée sur $\mathbb{R}$, cette inégalité donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \left|\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que u_{k+1} est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|u_{k+1}\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \lambda\,\|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ avec $\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Compte tenu de $\|\,u_1\,\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A$, une récurrence immédiate donne alors que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant A\lambda^n$ et, puisque $0 < \lambda < 1$, cette dernière majoration donne la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$. On en déduit que la suite $(f_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et on pose $f = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n$.

b) La fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Posons maintenant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+f^2(x)} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, g_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+f_n^2(x)}.$$

Comme précédemment, on obtient :

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant e^{-x^2}\,|f_n(x) - f(x)| \quad \text{d'où} \quad \|g_n - g\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}}$$

et il en résulte que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ donc sur tout segment $[0, x] \subset \mathbb{R}$.

Le théorème d'intégration des limites uniformes donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_{n+1}(x) = 1 + \lim_{n \to +\infty} \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \lim_{n \to +\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \varphi'(x \sin t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $x > 0$ fixé. Puisque φ' est continue, d'après le premier théorème de Weierstrass (voir le *Précis d'analyse, MP*, chapitre 3) il existe $(Q_n)_{\mathbb{N}}$, suite de polynômes, uniformément convergente vers φ' sur le segment $[-x, x]$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-x, x]$, $P_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t Q_n(u) \, \mathrm{d}u$. On définit ainsi une suite de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n' = Q_n$.

En écrivant $P_n(t) - \varphi(t) = \int_0^t \Big(Q_n(u) - \varphi'(u) \Big) \, \mathrm{d}u$, on obtient :

$$\|P_n - \varphi\|_\infty^{[-x,x]} \leqslant x \left\| Q_n - \varphi' \right\|_\infty^{[-x,x]},$$

la suite $(P_n)_{\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers φ sur $[-x, x]$.

Posons maintenant $\psi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(t \sin u) \, \mathrm{d}u$. On a alors :

$$f(t) - \psi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\varphi(t \sin u) - P_n(t \sin u) \Big) \, \mathrm{d}u$$

donc :

$$\|f - \psi_n\|_\infty^{[-x,x]} \leqslant \|P_n - \varphi\|_\infty^{[-x,x]}.$$

Ainsi la suite $(\psi_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-x, x]$.

D'après l'étude du deuxième cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in [-x, x], \quad P_n(t) = \psi_n(0) + t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_n'(t \sin u) \, \mathrm{d}u \tag{1}$$

Il est clair que les fonctions ψ_n sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-x, x]$ et puisque $(t, u) \mapsto P_n(t \sin u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-x, x] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le théorème de dérivation sous le signe somme (cas où l'intervalle d'intégration est compact) donne :

$$\forall t \in [-x, x], \quad \psi_n'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, P_n'(t \sin u) \, \mathrm{d}u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, Q_n(t \sin u) \, \mathrm{d}u.$$

De plus la suite $(\psi_n')_{\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $[-x, x]$ vers la fonction :

$$f' : t \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, \varphi'(t \sin u) \, \mathrm{d}u$$

car $\left\|\psi_n' - f'\right\|_\infty^{[-x,x]} \leqslant \left\|Q_n - \varphi'\right\|_\infty^{[-x,x]}$. Il en résulte donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_n'(t \sin u) \, \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t \sin u) \, \mathrm{d}u$$

car :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_n'(t \sin u) \, \mathrm{d}u - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t \sin u) \, \mathrm{d}u \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \| \psi_n' - f' \|_\infty^{[-x,x]}.$$

Le passage à la limite dans la relation (1) fournit alors :

$$\forall t \in [-x, x], \quad \varphi(t) = f(0) + t \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t \sin u) \, \mathrm{d}u.$$

Le réel x ayant été fixé quelconque, la propriété est démontrée.

C Séries de fonctions

Ex. 7

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1 + n^2x^2}{1 + n^4x^4}.$$

1) Étant donné $(a_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$g_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n\left(x - a_p\right).$$

Étudier la définition et la continuité de g_n.

2) Étudier les convergences simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(g_n)_{\mathbb{N}}$.

3) Montrer que $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ $(a < b)$ si et seulement si :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p \notin [a, b].$$

1) Il s'agit ici, n étant fixé, d'étudier la convergence d'une série de fonctions de la variable x.

Posons $u_p(x) = \dfrac{1}{2^p} f_n\left(x - a_p\right)$.

Sachant que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $2\,|xy| \leqslant x^2 + y^2$, en écrivant :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^4x^4} + \frac{n^2x^2}{1 + n^4x^4}$$

il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 + \frac{1}{2} < 2 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_p(x) < \frac{1}{2^{p+1}}.$$

En conséquence, la série de fonctions continues $\sum u_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et il en résulte que chaque fonction g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour l'étude de la convergence simple, il faut maintenant fixer x réel, ce qui amène à considérer une série de fonctions de la variable n.

Posons $v_p(n) = \dfrac{1}{2^p} f_n\left(x - a_p\right)$, comme ci-dessus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_p(n) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$$

ce qui montre que la série de fonctions $\sum v_p$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$. Dans ces conditions, le théorème de la limite terme à terme donne :

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} v_p(n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} v_p(n).$$

Or, pour x et p fixés :

– si $x = a_p$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(x - a_p\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(x - a_p\right) = 1$;

– si $x \neq a_p$, on a lorsque $n \to +\infty$, $f_n\left(x - a_p\right) \sim \dfrac{1}{n^2\left(x - a_p\right)^2}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\left(x - a_p\right) = 0$;

on en déduit que :

– si $x \in \{a_p \,/\, p \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = \sum\limits_{p \in I(x)} \frac{1}{2^p}$ où on a posé $I(x) = \{p \in \mathbb{N} \,/\, a_p = x\}$;

– et si $x \notin \{a_p \,/\, p \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = 0$.

> En utilisant la convention $\sum\limits_{i \in \varnothing} x_i = 0$ on peut écrire dans les deux cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x) = \sum\limits_{p \in I(x)} \frac{1}{2^p}$.

Finalement, la suite $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(x) = \sum_{p \in I(x)} \frac{1}{2^p}.$$

La limite g est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{a_p \,/\, p \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $g(a_p) > 0$ donc g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et puisque les g_n sont continues, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \in [a, b]$, g n'est pas continue sur $[a, b]$ et la convergence n'est pas uniforme sur $[a, b]$.

Par contraposition on en déduit que si la suite $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors :

$$\{a_p \,/\, p \in \mathbb{N}\} \cap [a, b] \neq \varnothing.$$

> Réciproquement, il nous faut montrer que si $[a, b]$ ne contient aucun a_p alors $(g_n)_{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$; il faut donc majorer $|g_n(x)|$ indépendamment de $x \in [a, b]$. La difficulté tient au fait qu'il se peut fort bien qu'il existe une suite extraite de $(a_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers a ou b, ce qui empêche de minorer $(|x - a_p|)_{p \in \mathbb{N}}$ par un réel strictement positif ; par contre, cela reste possible si on se limite à $p \leqslant p_0$ (p_0 fixé). Pour parvenir à notre but, une méthode naturelle consiste à découper la somme en deux :
>
> $$\sum_{p=0}^{+\infty} = \sum_{p=0}^{p_0} + \sum_{p=p_0+1}^{+\infty}$$

Pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, on a :

$$g_n(x) = \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) + \sum_{p=p_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$$

donc, compte tenu des majorations précédentes :

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) + \sum_{p=p_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p_0-1}} + \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on fixe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{p_0-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p).$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, a_p n'appartient pas au fermé $[a, b]$ et donc $d(a_p, [a, b]) > 0$.

Posons $\lambda = \min\limits_{0 \leqslant p \leqslant p_0} d(a_p, [a, b])$, puisqu'il s'agit du plus petit élément d'une famille de réels strictement positifs, on a aussi $\lambda > 0$.

Posons de même $\mu = \sup \left\{ |x - a_p| \ / x \in [a, b], p \in [\![0, p_a]\!] \right\}$, on obtient alors :

$$\forall x \in [\![a, b]\!], f_n(x - a_p) \leqslant \frac{1 + n^2\mu^2}{1 + n^4\lambda^4}$$

donc :

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1 + n^2\mu^2}{1 + n^4\lambda^4} \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant 2\frac{1 + n^2\mu^2}{1 + n^4\lambda^4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + n^2\mu^2}{1 + n^4\lambda^4} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ \frac{1 + n^2\mu^2}{1 + n^4\lambda^4} \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

et il vient finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ \|g_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$.

Ex. 8

On donne $x \in]0, \pi[$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n \ : \ t \mapsto t^{n-1} \sin(nx).$$

1) On pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t).$$

Montrer qu'il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de $\mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, S_n(t) = \frac{P_n(t)}{Q(t)}.$$

2) Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

1) Le calcul est classique : on fait apparaître une somme géométrique.

Avec $\sin(kx) = \mathrm{Im}\, e^{ikx}$, on obtient, puisque $te^{ix} \neq 1$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$:

$$S_n(t) = \mathrm{Im} \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} e^{ikx} = \mathrm{Im}\, e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}}$$

soit aussi :

$$S_n(t) = \mathrm{Im} \frac{\left(e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}\right)\left(1 - te^{-ix}\right)}{t^2 - 2t\cos x + 1}$$

$$S_n(t) = \frac{t^{n+1}\sin(nx) - t^n \sin(n+1)x + \sin x}{t^2 - 2t\cos x + 1}$$

2) Une majoration élémentaire donne la limite des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}\sin nt}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^n \sin(n+1)x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t$$

sans qu'il soit besoin de recourir aux «gros» théorèmes du cours.

Avec $t^2-2t\cos x+1=(t-\cos x)^2+\sin^2 x \geqslant \sin^2 x>0$, on obtient :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\sin(nx)}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)\sin^2 x}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}\sin(nx)}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t = 0$$

et, comme on a de même :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n\sin(n+1)x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t = 0,$$

il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin x}{t^2-2t\cos x+1}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\sin x}{(t-\cos x)^2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \operatorname{Arctan}\frac{1-\cos x}{\sin x}+\operatorname{Arctan}\frac{\cos x}{\sin x}.\end{aligned}$$

Puisque :

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos x}{\sin x}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

avec $\frac{x}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{\pi}{2}-x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, il vient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-x}{2}.$$

3) En remarquant que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 t^{k-1}\sin(kx)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}\end{aligned}$$

la question précedente montre la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n} \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

Ex. 9

E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $f \in E$, on pose :

$$Tf(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1) Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire T de E dans E.

2) Calculer $N(T)$ norme subordonnée de T.

3) Majorer $|\lambda|$ où λ est valeur propre de T.

4) Pour $x \in \left]0,1\right[$, on pose :

$$\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}.$$

Montrer que ni α, ni β, n'ont de prolongement en une fonction de E, mais que $\alpha - \beta$ se prolonge en une fonction de E.

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}.$$

1) Pour tout x de $[0,1]$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont dans $[0,1]$ donc, quelle que soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, Tf est aussi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

La linéarité étant évidente, on a bien $T \in \mathcal{L}(E)$.

2) L'espace E n'étant pas de dimension finie, il y a lieu de commencer par prouver que T est continue et alors, on aura $N(T) = \sup\left\{\frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \,/\, f \in E \setminus \{0\}\right\}$.

Pour tout $f \in E$, on a $\forall x \in [0,1]$, $|Tf(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ donc $\|Tf\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue sur E et que $N(T) \leqslant 2$.

La fonction constante égale à 1 est élément de E tel que $\|1\|_\infty = 1$ et $\|T1\|_\infty = 2$, ce qui montre que $N(T) \geqslant 2$.

Finalement $N(T) = 2$.

3) Si λ est valeur propre de T, il existe $f \in E$, $f \neq 0$, telle que :

$$Tf = \lambda f \quad \text{donc} \quad \|Tf\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty.$$

Alors la relation $\|Tf\|_\infty \leqslant N(T)\|f\|_\infty$ donne :

$$|\lambda|\,\|f\|_\infty \leqslant N(T)\|f\|_\infty$$

et, avec $\|f\|_\infty > 0$, il en résulte $|\lambda| \leqslant N(T)$ donc $|\lambda| \leqslant 2$.

4) Il est clair que β est continue sur $\left]0,1\right[$ et que $\lim_{x\to 0} \beta(x) = \lim_{x \to 1} \beta(x) = +\infty$. Écrivons :

$$\alpha(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

La convergence normale sur $[0, 1]$ des séries de fonctions de terme général :

$$u_n : x \mapsto \frac{1}{(x-n)^2} \quad \text{et} \quad v_n : x \mapsto \frac{1}{(x+n)^2}$$

résulte de :

$$\|u_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{(n-1)^2} \quad \text{et} \quad \|v_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{n^2}$$

et elle assure l'existence et la continuité sur $[0, 1]$ de :

$$\alpha_1 : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Il en résulte que :

$$\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$$

est continue sur $]0, 1[$ et que :

$$\lim_{x \to 0} \alpha(x) = \lim_{x \to 1} \alpha(x) = +\infty.$$

Ainsi aucune des fonctions α et β n'admet de prolongement continu sur $[0, 1]$.

Considérons maintenant la fonction $\gamma = \alpha - \beta$.

- Avec $\alpha_1(0) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\alpha_2(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ on obtient, au voisinage de 0 :

$$\alpha(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + o(1) \quad \text{soit} \quad \alpha(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

- Un développement limité donne $\dfrac{\sin \pi x}{\pi} = x - \dfrac{\pi^2 x^3}{6} + o(x^4)$, donc :

$$\left(\frac{\sin \pi x}{\pi}\right)^2 = x^2 - \frac{\pi^2 x^4}{3} + o(x^4) = x^2 \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

puis :

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

- On en déduit $\gamma(x) = o(1)$ ce qui prouve qu'en posant $\gamma(0) = 0$, on prolonge γ par continuité en 0.
- En remarquant que les fonctions :

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} \quad \text{et} \quad \psi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$$

sont 1-périodiques, on a de même, au voisinage de 1, $\gamma(x) = o(1)$ et on prolonge γ par continuité en 1 en posant $\gamma(1) = 0$.

- La fonction γ ainsi définie est élément de E.

> Si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de T, on a :
>
> $$\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}.$$
>
> Donc pour prouver que γ est nulle, il suffit de montrer qu'il existe $\lambda \notin \operatorname{Sp} T$ tel que $T\gamma = \lambda\gamma$.

Pour $x = 0$, on a $T\gamma(0) = \gamma(0) + \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \beta\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \pi^2$. Or :

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est classique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^2$ et finalement $T\gamma(0) = 0$. De même :

$$T\gamma(1) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma(1) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pour $x \in \left]0, 1\right[$, on a $T\gamma(x) = \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x+1}{2}\right) - \beta\left(\frac{x}{2}\right) - \beta\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Or :

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x-2n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x-(2n-1))^2}\\ &= 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = 4\,\alpha(x).\end{aligned}$$

$$\text{et}\quad \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \beta\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\frac{x}{2}} + \frac{\pi^2}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{4\pi^2}{\sin^2 \pi x} = 4\,\beta(x),$$

d'où finalement $T\gamma(x) = 4\gamma(x)$.

Cette égalité restant vraie pour $x \in \{0, 1\}$, on a $T\gamma = 4\gamma$; or, d'après 3), 4 n'est pas valeur propre de T, il en résulte donc $\gamma = 0$.

En tenant compte du fait que la fonction $\varphi - \psi$ est 1-périodique puisque :

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \varphi(x) = \psi(x),$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \varphi(x) = \psi(x).$$

Ex. 10

1) Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer l'existence de $F(z) = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$.

2) Montrer ensuite la continuité de la restriction de F à $\mathbb{R}$.

1) Dans le cas où z est réel, il suffit de prouver la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \ell n\left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$$

ce qui est immédiat puisque $\ell n\left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \sim -\frac{z}{2^n}$ quand $n \to +\infty$.

Dans le cas général, $z \in \mathbb{C}$, il faut raisonner différemment car on ne dispose pas de fonction logarithme complexe.

Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{z}{2^n} = 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\frac{z}{2^n}\right| < 1,$$

ainsi pour $n \geqslant n_0$ on a $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{z}{2^n}\right) > 0$ et il existe $(\rho_n, \theta_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$1 - \frac{z}{2^n} = \rho_n e^{i\theta_n}.$$

Plus précisement, on a $\rho_n = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2^n}\right)^2 + \frac{y^2}{2^{2n}}}$ et $\theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2^n - x}\right)$, donc :

$$1 - \frac{z}{2^n} = \left[\left(1 - 2^{-n}x\right)^2 + 2^{-2n}y^2\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[i \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2^n - x}\right)\right].$$

Posons alors $P_N = \prod_{n=n_0}^{N} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) = \exp\left(\sum_{n=n_0}^{N} \ln \rho_n + i \sum_{n=n_0}^{N} \theta_n\right)$.

Le problème, c'est-à-dire l'existence de $\lim_{N \to +\infty} P_N$, est ainsi ramené à l'étude de la convergence des séries de termes généraux $\ln \rho_n$ et θ_n.

Avec :

$$\ln \rho_n = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2x}{2^n} + \frac{x^2 + y^2}{2^{2n}}\right),$$

on obtient $\ln \rho_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ce qui prouve l'absolue convergence de la série $\sum_{n \geqslant n_0} \ln \rho_n$.

On a de même $\theta_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ce qui donne l'absolue convergence de la série $\sum_{n \geqslant n_0} \theta_n$.

Il en résulte l'existence de $\lim_{N \to +\infty} P_N$ et donc l'existence de $F(z)$ avec :

$$F(z) = \prod_{n=0}^{n_0 - 1} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \cdot \lim_{N \to +\infty} P_N = \prod_{n=0}^{n_0 - 1} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \cdot \exp\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln \rho_n + i \sum_{n=n_0}^{+\infty} \theta_n\right).$$

2) Étant donné $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit $n_a \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a}{2^{n_a}} < 1$. On a alors :

$$\forall x \in [-a, a], n \geqslant n_a \Rightarrow \frac{|x|}{2^n} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{x}{2^n} > 0.$$

donc :

$$F(x) = \prod_{n=0}^{n_a - 1} \left(1 - \frac{x}{2^n}\right) \exp\left(\sum_{n=n_a}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x}{2^n}\right)\right).$$

$$\sin nx \sin ny = -\frac{1}{2}\left[\cos n(x+y) - \cos n(x-y)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} n \sin nt \,\mathrm{d}t$$

on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \sin ny = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{x-y}^{x+y} n \sin nt \,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nt \,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

> Notons qu'il est inutile de vérifier a priori la convergence de la série de terme général :
> $$a_n \sin nx \sin ny$$
> puisque celle-ci nous est donnée par l'application du théroème d'intégration terme à terme de la série $\sum u_n$ sur tout segment $\left[x-y, x+y\right]$. Cependant, il est immédiat de vérifier directement que la série de fonctions de terme général :
> $$v_n \ :\ (x,y) \mapsto a_n \sin nx \sin ny$$
> converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, puisque :
> $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |v_n(x,y)| \leqslant a_n\,.$$

On peut aussi remarquer que, par parité de cos, ou imparité de sin ou symétrie de g, on a aussi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Supposons maintenant $f \geqslant 0$ sur $\left[0,\pi\right]$ et soit $(x,y) \in \left[0,\pi\right]^2$.

La symétrie de g permet de se ramener au cas où $x \leqslant y$ et on a alors :

$$0 \leqslant y - x \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y + x \leqslant 2\pi.$$

- Si $0 \leqslant y + x \leqslant \pi$, écrivons :

$$g(x,y) = \int_{y-x}^{y+x} f(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

avec $\left[y-x, y+x\right] \subset \left[0,\pi\right]$, la positivité de f sur $\left[0,\pi\right]$ donne $g(x,y) \geqslant 0$.

- Si $\pi < y+x \leqslant 2\pi$, on a $0 \leqslant \pi - x + \pi - y \leqslant \pi$ et (avec $x \leqslant y$), $\pi - y \leqslant \pi - x$ donc, en remarquant que $g(x,y) = g(\pi - x, \pi - y)$, il vient :

$$g(x,y) = \int_{y-x}^{2\pi - x - y} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui, avec $\left[y-x, 2\,\pi - x - y\right] \subset \left[0,\pi\right]$, montre que $g(x,y) \geqslant 0$.

- Réciproquement, supposons $g \geqslant 0$ sur $\left[0,\pi\right]^2$ et soit $x \in \left[0,\pi\right]$.

D'après la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$$

la continuité de f sur $\mathbb{R}$ montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x-y)\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(y-x)\right)$$

Supposons $x \in \left]0, \pi\right[$ et soit $h\ :\ [0,x] \to \mathbb{R},\ y \mapsto g(x,y)$. Cette fonction partielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ avec :

$$h'(y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Puisque $(x,y) \in [0,\pi]^2$ pour tout $y \in [0,x]$, h est positive sur $[0,x]$ et, puisque $h(0) = 0$, on a :

$$h'(0) \geqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = f(x) \geqslant 0.$$

En remarquant que $f(0) = f(\pi) = 0$ on a finalement montré que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

- En conclusion, $f \geqslant 0$ sur $[0,\pi]$ équivaut à $g \geqslant 0$ sur $[0,\pi]^2$.

D Exponentielles de matrices

Ex. 12

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $f_n(A) = \left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n$.

On suppose que $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est muni d'une norme d'algèbre.

1) Montrer que $f_n(A)$ tend vers e^A quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \leqslant \frac{k(k-1)}{2n}$.

3) Montrer que $\left\|e^A - f_n(A)\right\| \leqslant \frac{\|A\|^2 e^{\|A\|}}{2n}$.

Rappelons que si $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ on a :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

donc :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N},\ \left\|A^n\right\| \leqslant \|A\|^n.$$

1) Il s'agit d'une question classique que l'on peut traiter en écrivant $\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n$ comme somme d'une série de fonctions de la variable n.

Compte tenu de $\mathrm{C}_n^k = 0$ pour $k > n$, la formule du binôme donne :

$$\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = I_p + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{A^k}{k!} = I_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{A^k}{k!}.$$

Définissons les fonctions $u_k\ :\ \mathbb{N}^* \to \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_k(n) = \mathrm{C}_n^k \frac{A^k}{n^k}.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_0(n) = I_p$$

et : $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_k(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{A^k}{k!}$$

d'où on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_k(n)\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!},$$

puis $$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u_k\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_k(n)\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

La série numérique de terme général $\dfrac{\|A\|^k}{k!}$ étant convergente, cette majoration prouve la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{N}$ de la série de fonctions $\sum u_k$.

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} = e^A.$$

2) Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, une démonstration par récurrence sur k semble naturelle.

Posons $P_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$, l'inégalité annoncée se lit :

$$P_k \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \qquad (H_k)$$

(H_1) est vraie puisque, pour $k = 1$, $P_1 = 1$ et $1 - \dfrac{1(1-1)}{2n} = 1$.

Supposons (H_k) vraie avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

On a alors :

$$P_{k+1} = P_k\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geqslant \left(1 - \frac{k(k-1)}{2n}\right)\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \frac{k(k+1)}{2n} + \frac{k^2(k-1)}{2n^2}$$

donc $P_{k+1} \geqslant 1 - \dfrac{k(k+1)}{2n}$ ce qui montre que (H_{k+1}) est vraie.

Finalement, une récurrence limitée montre que (H_k) est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \leqslant \frac{k(k-1)}{n}.$$

Remarquons, de plus, que cette inégalité reste vraie pour $k > n$ puisqu'alors :

$$\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = 0.$$

3) D'après le calcul du 1), on a :

$$e^A - f_n(A) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[1 - \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right)\frac{A^k}{k!}$$

donc, avec la majoration du 2), on a :

en remarquant que, pour appliquer le 1), il faut faire apparaitre une expression du type :

$$\left\|X^p - Y^p\right\|.$$

Posons $X = \exp\left(\dfrac{A+B}{p}\right)$ et $Y = \exp\left(\dfrac{A}{p}\right)\exp\left(\dfrac{B}{p}\right)$, d'après le 1) en posant :

$$K(p) = \sup\left(\|X\|, \|Y\|\right),$$

on obtient :

$$\left\|\exp(A+B) - \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p\right\| = \|X^p - Y^p\| \leqslant p\,K(p)^{p-1}\|X - Y\|.$$

Sachant que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\|M\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|M\|^k}{k!} = e^{\|M\|},$$

il vient :

$$\|X\| = \left\|\exp\left(\frac{A+B}{p}\right)\right\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A+B\|}{p}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{p}\right)$$

$$\text{et}\quad \|Y\| \leqslant \left\|\exp\left(\frac{A}{p}\right)\right\|\left\|\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\|}{p}\right)\exp\left(\frac{\|B\|}{p}\right) = \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{p}\right)$$

donc :

$$K(p)^{p-1} = \sup\left(\|X\|^{p-1}, \|Y\|^{p-1}\right) \leqslant \exp\left(\|A\| + \|B\|\right)$$

et enfin, en posant $K_0 = \exp\left(\|A\| + \|B\|\right)$:

$$\left\|X^p - Y^p\right\| \leqslant p\,K_0\left\|\exp\left(\frac{A+B}{p}\right) - \exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right\|.$$

On dispose alors des développements limités :

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right) = I_n + \frac{A}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\exp\left(\frac{B}{p}\right) = I_n + \frac{B}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\exp\left(\frac{A+B}{p}\right) = I_n + \frac{A+B}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

dont on déduit :

$$\exp\left(\frac{A+B}{p}\right) - \exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right) = o\left(\frac{1}{p}\right)$$

et donc :

$$\lim_{p\to+\infty} p\left\|\exp\left(\frac{A+B}{p}\right) - \exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right\| = 0.$$

Avec la majoration précédente, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} X^p - Y^p = 0$, et donc :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(e^{\frac{A}{p}}\cdot e^{\frac{B}{p}}\right)^p = e^{A+B}.$$

Ⓔ Séries entières

Ex. 14

Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1) Étudier la définition et la continuité de f.

2) Étudier la dérivabilité de f, calculer f' et en déduire f.

Les questions de convergence, de continuité, de dérivabilité sont immédiates dès que l'on a vu que f est construite avec la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}.$$

1) Posons $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, F est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

De plus, $\forall x \in \left[-1, 1\right]$, $\frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc cette série converge normalement sur $\left[-1, 1\right]$ et sa fonction somme est définie, continue sur $\left[-1, 1\right]$.

On sait aussi que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement pour tout x tel que $|x| > 1$, l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f : $x \mapsto F(1-x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right)$ est donc caractérisé par :

$$|1-x| \leqslant 1 \quad , \quad x \neq 0 \quad , \quad \left|\frac{x-1}{x}\right| \leqslant 1.$$

Les deux premières conditions donnent $0 < x \leqslant 2$ et la troisième se réduit alors à $-1 \leqslant \frac{x-1}{x}$.

On a donc $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et f est continue sur $\mathcal{D}$ comme somme et composée de fonctions continues.

2) Sachant que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1, 1\right[$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -F'(1-x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} + \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

À ce stade, il est souhaitable de pouvoir annoncer que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ell n(1-x)$$

sans avoir besoin de reprendre des calculs forcément faits en cours.

Pour $x \neq 1$, on a donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}\,\ell n\left[1-(1-x)\right] - \frac{1}{x(x-1)}\,\ell n\left(1-\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\,\ell n\, x.$$

La continuité de f' sur $\left]\frac{1}{2},2\right[$ permet de dire que cette formule reste valable en 1. Ainsi, on a :

$$\forall x \in \left]\frac{1}{2},2\right[, f'(x) = -\frac{1}{x}\,\ell n\, x$$

d'où on déduit :

$$f(x) = \lambda - \frac{1}{2}\,\ell n^2\, x.$$

Avec $f(1) = 0$ et la continuité de f sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$ on a finalement :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},2\right], f(x) = -\frac{1}{2}\,\ell n^2\, x.$$

Ex. 15

1) Calculer $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$.

2) Exprimer $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de A.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\,\mathrm{d}t > \frac{1}{B}$.

1) On remarque que :

$$\frac{1}{4n+3} = \int_0^1 t^{4n+2}\,\mathrm{d}t$$

donc, à une permutation près des opérateurs $\sum$ et $\int$, on voit apparaitre une somme de série géométrique.

A est la somme d'une série convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

Écrivons $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ avec $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{4k+3} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{4k+2}\,\mathrm{d}t$.

La linéarité de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{4k+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \frac{1-\left(-t^4\right)^n}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{4n+2}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Avec :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{4n+2}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{4n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4n+3},$$

on obtient $A = \lim_{n \to +\infty} A_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$ soit aussi, par parité de $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^4}$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt.$$

> Remarquons que l'utilisation des propriétés usuelles des sommes géométriques a permis de justifier la permutation de $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^1$ sans recours à quelque «gros» théorème.

Une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{t}{2\sqrt{2}(t^2 - t\sqrt{2}+1)} - \frac{t}{2\sqrt{2}(t^2 + t\sqrt{2}+1)}$$

donc en remarquant que $\int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 - t\sqrt{2}+1}\,dt = -\int_{-1}^{1} \frac{u}{u^2 + u\sqrt{2}+1}\,du$, il vient :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 - t\sqrt{2}+1}\,dt$$

soit aussi :

$$A = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2}+1}\,dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ell n\left(t^2 - t\sqrt{2}+1\right)\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(t\sqrt{2}-1\right)\right]_{-1}^{1}$$

Compte tenu de $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan}\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$ lorsque $a > 0$, on obtient facilement :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ell n\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

2) Avec $\operatorname{Arctan} t \sim t$ quand t tend vers 0, on obtient :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}} = 0$$

donc la fonction $f \;:\; t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{\sqrt{t}}$ est prolongeable par continuité en $[0, 1]$ ce qui assure l'existence de :

$$B = \int_0^1 f.$$

Le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$ donne alors $B = 2\int_0^1 \operatorname{Arctan} u^2\,du$.

> Le développement en série entière de Arctan doit être connu. C'est cela qui permet d'imaginer, qu'après une intégration sur $[0, 1]$, on va voir apparaître une série qui peut se relier facilement à celle du a).

Hidden page

soit aussi :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\operatorname{Arctan} t}\,\mathrm{d}t > \frac{1}{B}\,.$$

> La liberté du couple $\left(\sqrt{f}, \dfrac{1}{\sqrt{f}}\right)$ sert à justifier le fait que l'inégalité est stricte.

Ex. 16

1) Développer en série entière à l'origine les fonctions :

$$f \;:\; x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{et} \quad g \;:\; x \mapsto (1-x)^n.$$

2) En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,\mathrm{C}_n^{n-k}\,\mathrm{C}_{n+k}^{n}$.

1) Avec $u \;:\; x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ on a :

$$\forall x \in \left]-\infty, -1\right[, f(x) = \frac{1}{n!}u^{(n)}(x)$$

donc $u(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour $x \in \left]-1, 1\right[$ donne :

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$$

$$\text{soit} \quad f(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{C}_k^n\,x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{n+k}^n\,x^k$$

Le rayon de convergence commun à ces séries est évidemment égal à 1.

g est une fonction polynôme, son développement s'obtient en développant $(1-x)^n$ avec la formule du binôme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\,x^k$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\,x^k$$

grâce à la convention $\mathrm{C}_n^k = 0$ pour $k > n$.

2) Pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}$$

donc :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

et en faisant le produit de Cauchy des deux séries précédentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\mathrm{C}_n^{k-j}\,\mathrm{C}_{n+j}^{n}\right)x^k=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k.$$

Par unicité du développement en série entière de fg on en déduit :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\mathrm{C}_n^{n-j}\,\mathrm{C}_{n+j}^{n}=1.$$

Ex. 17

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $p(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10.

On pose $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p(n)}{n(n+1)}$. Établir l'existence et calculer S.

> Pour l'existence, il faut penser que l'on dispose de l'encadrement :
> $$10^{p(n)-1}\leqslant n<10^{p(n)}$$
> qui permet de donner un équivalent de $p(n)$ et de $u_n=\dfrac{p(n)}{n(n+1)}$.

En utilisant le logarithme décimal, l'encadrement :

$$10^{p(n)-1}\leqslant n<10^{p(n)}$$

donne :

$$\log n<p(n)\leqslant 1+\log n$$

et donc, quand $n\to+\infty$, $p(n)\sim\log n$ soit aussi $p(n)\sim\dfrac{\ell n\, n}{\ell n\, 10}$.

Posons $K=\dfrac{1}{\ell n\, 10}$, on obtient $u_n\sim K\dfrac{\ell n\, n}{n^2}$ donc $u_n=o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est convergente.

> $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série télescopique. En conséquence, puisque sur chaque intervalle $I_k=[\![10^{k-1},10^k-1]\!]$ $p(n)$ est constant, égal à k, les sommes $\sum_{n\in I_k}u_n$ s'explicitent facilement.

Par groupement des termes, on a :

$$S=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1}\frac{p(n)}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{10^{k-1}}-\frac{1}{10^k}\right)$$

donc $\qquad S=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{9k}{10^k}=\dfrac{9}{10}f\left(\dfrac{1}{10}\right)\qquad$ avec $\quad f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\,x^{k-1}$.

La série entière $\sum_{k\geqslant 1}k\,x^{k-1}$, de rayon de convergence égal à 1, est la série dérivée de $\sum_{k\geqslant 0}x^k$ donc :

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)$$

c'est-à-dire :

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit facilement :

$$S = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Ex. 18

Développer en série entière à l'origine $f\ :\ x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos^2 t}$ et en déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

Il faut d'abord préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

Pour $x < 1$ on a $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - x\cos^2 t > 0$ donc :

$$\varphi\ :\ t \mapsto \frac{1}{1 - x\cos^2 t}$$

est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x)$ est défini.

Pour $x \geqslant 1$, il existe $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $1 - x\cos^2 t_0 = 0$:

$$t_0 = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{x}},$$

et la fonction φ présente une discontinuité en t_0. Lorsque $t_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a, au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \frac{\cos^2 t_0}{\cos^2 t_0 - \cos^2 t} \sim \frac{\cos^2 t_0}{(t - t_0)\sin 2t_0}$$

et si $t_0 = 0$ on a, au voisinage de 0 :

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \cos^2 t} \sim \frac{1}{t^2}.$$

Dans chacun de ces cas, φ est non intégrable sur tout intervalle $\left]t_0, t_0 + \alpha\right[$ et f est non définie.

Finalement, on a $\mathcal{D} = \left]-\infty, 1\right[$.

Ainsi f est définie sur un voisinage de 0 et on peut se poser la question de savoir si elle est développable en série entière autour de ce point.

Il est clair que, pour obtenir un développement faisant intervenir les intégrales de Wallis :

$$W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t,$$

la méthode consiste à développer :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x\cos^2 t}$$

en série entière puis montrer que l'on peut intégrer terme à terme ce développement par rapport à la variable t.

D'autre part, on voit que :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$$

donc, si R est le rayon de convergence du développement recherché, on a $\left]-R, R\right[\subset \mathcal{D}$ c'est-à-dire $R \leqslant 1$ et, par la suite, on va supposer $|x| < 1$.

Pour $|x| < 1$ on a $\forall t \in \mathbb{R},\ \left|x\cos^2 t\right| \leqslant |x| < 1$, donc :

$$\frac{1}{1 - x\cos^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^{2n} t$$

puis, avec les propostions (1) et (2), on obtient :

$$c_n(g) = 0 \text{ si } n < 0 \quad , \quad c_n(g) = a_n \text{ si } n \geqslant 0.$$

Le théorème de Parseval appliqué à la fonction g donne alors la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2$ avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta.$$

Ex. 20

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

1) Montrer que $f(x)$ existe si $x \in \left] -1, 1 \right[$ et que $g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que, pour $x > 1$, $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t)\, dt$.

1) Pas de complication inutile : l'énoncé ne demande pas de trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, mais seulement de prouver que $\mathcal{D}_f$ contient $\left] -1, 1 \right[$.

Posons $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

La majoration $\left| a_n x^n \right| \leqslant A |x|^n$ montre que :

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

est absolument convergente pour tout x tel que $|x| < 1$.

Le rayon de convergence R de cette série entière vérifie donc $R \geqslant 1$ et $\mathcal{D}_f$ contient $\left] -1, 1 \right[$.

De même, sachant que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout x, la majoration :

$$\left| a_n \frac{x^n}{n!} \right| \leqslant A \frac{|x|^n}{n!}$$

montre qu'il en est de même pour $\sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$.

Le rayon de convergence de la seconde série entière est donc $+\infty$ et on a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

Remarquer que l'on ne peut rien dire de plus au niveau de $\mathcal{D}_f$. En effet :

pour $a_n = 1$ on a $R = 1$ et $\mathcal{D}_f = \left] -1, 1 \right[$;

pour $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ on a $R = 1$ et $\mathcal{D}_f = \left[-1, 1 \right]$;

pour $a_n = \frac{1}{2^n}$ on a $R = 2$ et $\mathcal{D}_f = \left] -2, 2 \right[$;

pour $a_n = \frac{1}{n!}$ on a $R = +\infty$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Ainsi, tous les cas sont possibles.

2) D'après le 1), la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in [0, +\infty[, |g(t)| \leqslant A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = Ae^t.$$

Donc, $t \mapsto e^{-tx} g(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie :

$$\forall t \in [0, +\infty[, e^{-tx} |g(t)| \leqslant Ae^{-(x-1)t}$$

elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ dès que $x - 1 > 0$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!} e^{-tx} \, \mathrm{d}t.$$

> Nous nous retrouvons ainsi face à un problème de permutation série-intégrale. L'intervalle d'intégration étant non borné, nous nous orientons vers le théorème de convergence dominée.

Posons $u_n \; : \; t \mapsto a_n \dfrac{t^n}{n!} e^{-tx}$.

Chaque u_n est intégrable sur $[0, +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |u_n| &= \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{|a_n|}{n! x^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n \, \mathrm{d}u \quad \text{(en posant } u = tx\text{)} \\
&= \frac{|a_n|}{n! x^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Avec $|a_n| \leqslant A$ et $x > 1$ on en déduit que la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ est convergente et le théorème de convergence dominée spécial aux séries donne :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) \, \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ex. 21

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \, x^n$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 1$.

> Il s'agit ici d'étudier la somme d'une série entière au bord de l'intervalle de convergence.
>
> Lorsque l'on dispose d'une série de fonctions de terme général $u_n \; : \; x \mapsto \varphi(n, x)$ où, pour tout x, la fonction $t \mapsto \varphi(t, x)$ est positive, décroissante, il est facile d'encadrer la somme de cette série au moyen d'intégrales, ce qui permet souvent de conclure.

Dans l'exemple proposé, la fonction ψ : $t \mapsto \sqrt{t}\, x^t$ n'est monotone décroissante qu'à partir de :

$$a = -\frac{1}{2\ln x},$$

valeur qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1. Nous ne sommes donc pas dans les conditions d'application de la méthode évoquée précédemment. Nous allons nous y ramener en remarquant que :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Il est clair que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$ et divergente au point 1.

Pour $x \in [0, 1[$, formons :

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}\, x^n,$$

puis :

$$(1-x) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

À ce niveau, on dispose d'une fonction :

$$t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}$$

qui est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Cependant, cette fonction paraît encore un peu compliquée et nous pouvons simplifier le problème en effectuant un premier encadrement.

En remarquant que $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}}$ on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n-1}} \qquad (1)$$

Il faut faire attention au fait qu'une inégalité est vraie pour tout $n \geqslant 1$, alors que l'autre nécessite $n \geqslant 2$.

Donc, en posant $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$, il vient $h(x) \leqslant (1-x) f(x) \leqslant x + x\, h(x)$.

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = +\infty$ (cela va aussi être prouvé par la suite) et l'encadrement précédent donne $(1-x) f(x) \underset{x \to 1}{\sim} h(x)$.

On est donc en fait ramené à la recherche d'un équivalent de $h(x)$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{2\sqrt{t}}$ est décroissante, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} \frac{x^t}{2\sqrt{t}}\, dt \leqslant \frac{x^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x^t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

et en sommant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{t \ln x}}{2\sqrt{t}}\, dt \leqslant h(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{t \ln x}}{2\sqrt{t}}\, dt$$

soit, en posant $u = -t\,\ell n\, x = t\,|\ell n\, x|$:

$$\frac{1}{2\sqrt{|\ell n\, x|}}\int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{|\ell n\, x|}}\int_{0}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du \qquad (2)$$

Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on obtient :

$$\int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{|\ell n\, x|} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$\text{donc}\quad \int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \sqrt{\pi} + \mathcal{O}\left(\sqrt{|\ell n\, x|}\right)$$

car $0 < \displaystyle\int_0^{a} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du \leqslant \int_0^{a} u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\sqrt{a}$ donne $\displaystyle\int_0^{a} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \mathcal{O}(\sqrt{a})$ lorsque $a \to 0$.

De ce calcul, on déduit, lorsque x tend vers 1 :

$$\frac{1}{2\sqrt{|\ell n\, x|}}\int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du \sim \frac{1}{2\sqrt{|\ell n\, x|}}\int_{0}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

Alors l'encadrement (2) montre que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = +\infty$, avec $h(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$ et enfin, compte tenu de (1), il vient :

$$(1-x)f(x) \sim h(x)$$

donc :

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ex. 22

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^{n^p} \quad \text{où } p \text{ est un entier naturel fixé non nul.}$$

2) On pose :

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^p} \quad \text{pour } |x| < R.$$

Trouver la limite et un équivalent simple de $f_p(x)$ lorsque $x \to R$.

3) Trouver la limite et un équivalent simple quand $p \to +\infty$ de $f_p(x) - x - 1$ où x est fixé avec $|x| < R$.

1) Il s'agit bien d'une série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$, mais elle est lacunaire : on a

$$a_k = 0 \text{ si } k \notin \left\{n^p \;/\; n \in \mathbb{N}\right\} \text{ et } a_k = 1 \text{ si } k \in \left\{n^p \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

C'est le moment de se souvenir qu'il existe diverses façons de caractériser le rayon de convergence. Par exemple :

$$R = \sup\left\{\,|x| \;/\; \lim_{k\to+\infty} a_k x^k = 0\right\}.$$

Pour $|x| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n^p} = 0$ et pour $|x| \geqslant 1$, x^{n^p} ne tend pas vers 0 donc $R = 1$.

2) Lorsque l'on a affaire à une série entière $\sum a_k x^k$ à coefficients a_k positifs, de rayon de convergence $R < +\infty$, si cette série diverge au point R, on a :

$$\lim_{x \to R} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = +\infty.$$

C'est le cas dans l'exemple proposé.

Il est clair que f_p est croissante sur $[0, 1[$ et d'autre part que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f_p(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n+1} x^{k^p}.$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{k^p} = n + 1$, on déduit qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $f_p(x) \geqslant n$.

Ceci étant vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_p est non majorée sur $[0, 1[$ donc, puisqu'elle est croissante, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f_p(x) = +\infty.$$

À x fixé, lorsqu'il existe une fonction φ_x décroissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \varphi_x(n)$$

il est simple d'obtenir un encadrement de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

au moyen d'intégrales et c'est souvent une méthode efficace dans la recherche d'équivalents.

Pour x fixé dans $]0, 1[$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto x^{t^p} = e^{t^p \ln x}$ est décroissante (car $\ln x < 0$), continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

On a donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n^p} = \varphi_x(n) \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$

et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x^{n^p} = \varphi_x(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$

En sommant, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{t^p \ln x}\,\mathrm{d}t \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{t^p \ln x}\,\mathrm{d}t$$

soit, en posant $u = t^p\,|\ln x|$ donc $t = u^{\frac{1}{p}}\,|\ln x|^{-\frac{1}{p}}$:

$$\frac{1}{p}\,|\ln x|^{-\frac{1}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}u \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \frac{1}{p}\,|\ln x|^{-\frac{1}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}u$$

ou encore :

$$\frac{1}{p}\,|\ln x|^{-\frac{1}{p}}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant f_p(x) \leqslant 1 + \frac{1}{p}\,|\ln x|^{-\frac{1}{p}}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

Il en résulte, quand x tend vers 1, $f_p(x) \sim \dfrac{\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{(1-x)^{\frac{1}{p}}}$.

3) Formons $f_p(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n^p} = x^{2^p}\left[1 + \sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p}\right]$.

> Ce qui doit sauter aux yeux est que, dans ce cas c'est-à-dire lorsque p tend vers $+\infty$, x étant fixé tel que $|x| < 1$, le terme dominant de la série est le premier : x^{2^p}.
>
> Il reste alors à prouver que :
>
> $$\sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p} = o\left(x^{2^p}\right) \quad \text{ou encore que} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p} = o(1).$$

Pour $n \geqslant 3$, la fonction $\Psi \ : \ t \mapsto n^t - 2^t$ est croissante sur $[1, +\infty[$ car $\Psi'(t) = n^t \ln n - 2^t \ln 2$ est clairement strictement positif.

On obtient donc :

$$\forall p \in [\![1, +\infty[\![,\ n^p - 2^p \geqslant n - 2 \quad \text{puis} \quad |x|^{n^p - 2^p} \leqslant |x|^{n-2} \quad (\text{car } |x| < 1).$$

Il en résulte que la série de fonctions de terme général $v_n \ : \ p \mapsto x^{n^p - 2^p}$ converge normalement donc uniformément sur $[\![1, +\infty[\![$.

En conséquence, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} v_n(p) = \sum_{n=3}^{+\infty} \lim\limits_{p \to +\infty} v_n(p) = 0$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} x^{n^p - 2^p} = o(1) \text{ quand } p \to +\infty$$

et finalement :

$$f_p(x) - 1 - x \sim x^{2^p} \text{ lorsque } p \to +\infty.$$

(F) Séries de Fourier

Ex. 23

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique, et telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$.

Montrer que $\|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'|^2$.

> Dans le cadre des fonctions continues, 2π-périodiques, la formule de Parseval permet d'exprimer la norme quadratique d'une fonction f au moyen de ses coefficients de Fourier. En appliquant ce résultat à f', qui est ici continue, on a :
>
> $$\int_0^{2\pi} |f'|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2.$$
>
> Le premier membre de l'inégalité annoncée étant lié à f, il est bon de se souvenir :
>
> 1) que f est somme de sa série de Fourier ;
>
> 2) que l'on sait exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

D'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$$

et puisque, par hypothèse $c_0(f) = 0$, il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f) e^{inx}.$$

Puis, sachant que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(f'\right) = inc_n(f)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n\left(f'\right)}{in} e^{inx}.$$

> Pour évaluer $\|f\|_\infty$, il faut maintenant majorer $|f(x)|$. On peut, pour ce faire, penser à une inégalité du type Cauchy-Schwarz.

Soit E l'ensemble des familles complexes $u = \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que les séries :

$$\sum_{n \geqslant 0} |u_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 0} |u_{-n}|^2 \quad \text{soient convergentes.}$$

Avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, |a + b|^2 \leqslant \left(|a| + |b|\right)^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \leqslant 2\left(|a|^2 + |b|^2\right),$$

on vérifie facilement que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

De même l'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ montre que la fonction :

$$\varphi \;:\; E^2 \to \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{u}_n v_n$$

est définie sur E^2, puis on vérifie que φ est un produit scalaire hermitien sur E.

D'après le théorème de Parseval, la famille $u = \left(\overline{c_n\left(f'\right)}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est élément de E et, comme il en est de même pour la famille $v = \left(v_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $v_0 = 0$ et $v_n = \dfrac{e^{inx}}{in}$ si $n \neq 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\varphi(u, v)|^2 = \left|\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n\left(f'\right) \frac{e^{inx}}{in}\right|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left|c_n\left(f'\right)\right|^2 \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}.$$

Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, cette inégalité s'écrit :

$$|f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'|^2 \cdot \frac{\pi^2}{3}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'|^2.$$

Il reste à passer au sup pour obtenir la formule annoncée.

Ex. 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha \cos x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}$.

> La question peut faire penser à la formule de Parseval. Pour cela, il faut exhiber une fonction f telle que $|f(x)|^2 = e^{2\alpha \cos x}$.

Soit $f \;:\; x \mapsto e^{\alpha e^{ix}}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = e^{\alpha \cos x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cette fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2.$$

Calculons les coefficients de Fourier de f.

Sachant que $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, on a $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n\,e^{inx}}{n!}$, donc :

$$c_p(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ipx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n\,e^{i(n-p)x}}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de $\left|\dfrac{\alpha^n\,e^{i(n-p)x}}{n!}\right|=\dfrac{|\alpha|^n}{n!}$, la convergence de la série numérique :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{|\alpha|^n}{n!}$$

montre la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général :

$$u_n\ :\ x\mapsto\frac{\alpha^n\,e^{i(n-p)x}}{n!}.$$

On dispose alors du théorème d'intégration terme à terme sur $[0,2\pi]$:

$$c_p(f)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)x}\,\mathrm{d}x$$

donc, sachant que $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)x}\,\mathrm{d}x=0$ si $n-p\neq 0$, on obtient :

$$\begin{cases}c_p(f)=0 & \text{si } p<0\\ c_p(f)=\dfrac{\alpha^p}{p!} & \text{si } p\geqslant 0\end{cases}$$

Finalement la formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}.$$

Ex. 25

Pour x réel, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!^2}$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Comme dans l'exercice 24, la formule de Parseval permet de donner une expression de $f(x)$ sous forme d'intégrale.

On note d'abord que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{n!^2}$ est $+\infty$.

Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, posons :

$$g_x\ :\ \theta\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\theta},$$

g_x apparaît comme la somme d'une série trigonométriques, normalement convergente sur $\mathbb{R}$, car :

$$\left|\frac{x^n}{n!}e^{in\theta}\right| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Il s'agit donc d'une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, dont les coefficients de Fourier sont :

$$c_n(g_x) = 0 \text{ si } n < 0 \quad , \quad c_n(g_x) = \frac{x^n}{n!} \text{ si } n \geqslant 0.$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_x(\theta)|^2 \, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n(g_x)\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = f(x).$$

Comme d'autre part on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ g_x(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(xe^{i\theta}\right)^n}{n!} = e^{xe^{i\theta}},$$

donc $|g_x(\theta)| = e^{x\cos\theta}$, il vient :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta.$$

Enfin, puisque $\theta \mapsto e^{2x\cos\theta}$ est 2π-périodique et paire, on a a aussi ;

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta = 2\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$$

et

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta.$$

> Avant de se lancer dans la recherche d'un équivalent, on commence par prouver que $f(x)$ tend vers $+\infty$ et, en notant que :
>
> $$x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$$
>
> reste bornée, on obtient un premier équivalent de $f(x)$.

Pour tout $x \geqslant 0$, il est clair que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2} \geqslant 1 + x^2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ on a $\cos\theta \leqslant 0$, donc pour tout $x \geqslant 0$:

$$e^{2x\cos\theta} \leqslant 1 \text{ et } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta = o_{+\infty}\big(f(x)\big).$$

Ainsi la relation $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x\cos\theta} \, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x\cos\theta} \, d\theta$ s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x\cos\theta} \, d\theta + o_{\infty}\big(f(x)\big)$$

G Convergence dominée

Ex. 27

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$.

Il est visible que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t = 0$$

(par exemple $0 \leqslant \int_0^1 \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$) on a donc affaire à une forme indéterminée $\infty \times 0$.

Le premier travail va consister à regrouper ces deux facteurs en faisant entrer n dans l'intégrale au moyen d'un changement de variable.

Remarquons, de plus, que pour espérer utiliser un théorème usuel concernant les limites de la forme $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n$, il faut que l'intervalle I soit fixe (indépendant de n). Le choix du changement de variable devra respecter cette condition.

Remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment et on a aussi :

$$I_n = n\int_0^1 \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t = n\int_{]0,1]} \ell n\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t.$$

On se limite maintenant à $n \geqslant 1$.

La fonction $\varphi\ :\ u \mapsto t = u^{\frac{1}{n}}$ définit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même, on a donc :

$$I_n = \int_{]0,1]} \frac{\ell n(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u.$$

Considérons alors les fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(u) = \dfrac{\ell n(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}} & \text{si } u \in\,]0,1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Chaque f_n, $n \geqslant 1$, est continue sur $[0,1]$ (car $\ell n(1+u) \underset{0}{\sim} u$) et on a donc aussi :

$$I_n = \int_{]0,1]} f_n = \int_{[0,1]} f_n\,.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $f\ :\ u \mapsto \frac{\ell n(1+u)}{u}$ qui est continue et intégrable sur $]0,1]$ puisque prolongeable par continuité en 0.

D'autre part, on a $\forall u \in\,]0,1]$, $0 \leqslant f_n(u) \leqslant \frac{\ell n(1+u)}{u}$ donc le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1]} f_n = \int_{]0,1]} f$$

Hidden page

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} V_n(x)\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Ceci prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n$ est convergente de somme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g$, et donc que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n$ est convergente avec :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell n(\sin x)\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell n(\sin x)}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour conclure, il reste à calculer cette intégrale.

> Pour s'en sortir avec un calcul de primitive, il y a lieu de faire disparaître le terme en logarithme. Une intégration par parties devrait nous pemrettre de réaliser cette opération, mais pour ce faire, il faudrait que l'on puisse reconnaître dans $\dfrac{1}{1-\sin x}$ une dérivée simple, et ce n'est pas le cas !
>
> Par contre, si on avait :
>
> $$\frac{1}{1-\cos x} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{1-\sin x}\,,\ \text{avec } 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$
>
> on pourrait écrire :
>
> $$\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\operatorname{cotan}\frac{x}{2}\right).$$
>
> Voilà une idée qui doit permettre de débloquer la situation.

Le changement de variable défini par $x = \frac{\pi}{2} - t$ donne :

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell n(\sin t)}{1-\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell n(\cos x)}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell n(\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

> On sait que, dans le cadre des intégrales sur un intervalle quelconque, l'intégration par parties doit être manipulée avec précautions. Pour éviter ces difficultés, nous allons déterminer une primitve F de $x\mapsto \dfrac{\ell n(\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Avec $\dfrac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\operatorname{cotan}\dfrac{x}{2}\right)$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ell n(\cos x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ell n(\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x &= -\ell n(\cos x)\operatorname{cotan}\frac{x}{2} - \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ell n(\cos x)\operatorname{cotan}\frac{x}{2} - \int \frac{1+\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Une primitve de $x\mapsto \dfrac{\ell n(\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ est donc :

soit aussi :

$$I_n = n\,\ell n\, n \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t + n\int_0^1 (1-t)^n \,\ell n\, t \,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\,\ell n\, n + nJ_n$$

où on a posé :

$$J_n = \int_0^1 (1-t)^n \,\ell n\, t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^n \,\ell n(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

Avec $u(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{n+1}$ et $v(x) = \ell n(1-x)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1[$ et on a :

$$J_n = \int_0^1 u'v.$$

En remarquant qu'au voisinage de 1, $u(x) \sim x-1$, on obtient $\lim\limits_{x\to 1} u(x)v(x) = 0$. Ceci justifie l'intégration par parties :

$$J_n = \int_0^1 u'v = \big[u\,v\big]_0^1 - \int_0^1 u\,v' = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

donc : $$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(1+x+\ldots+x^n\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

On obtient finalement :

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1} - \ell n\, n\right).$$

À ce niveau, nous voyons apparaître une suite très classique dont la limite est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ell n\, n\right).$$

En conclusion, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\gamma$, et compte tenu du 2), il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\ell n\, x\,\mathrm{d}x = -\gamma.$$

Ex. 31

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\ell n\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

1) Montrer que f est définie, continue, dérivable sur $]-1,+\infty[$.

2) Trouver un équivalent de f en 0.

3) Montrer que $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

4) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

1) On applique les théorèmes du cours.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > -1$:

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\,\ell n\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Quel que soit $x > -1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est alternée avec :

$$|u_n(x)| = \ell n\left(\frac{n+x}{n}\right) \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |u_n(x)| = \ell n\left(\frac{n}{n+x}\right) \text{ si } -1 < x \leq 0$$

donc la suite $\left(|u_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme il est clair que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0,$$

on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente d'après le critère des séries alternées.

Ainsi f est définie sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Soit maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-1 < a < 0 < b$ et $R_n(x)$ le restre d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x).$$

Puisque $\left(|u_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq |u_n(x)|.$$

Donc, si $x \in [a, 0]$:

$$|R_n(x)| \leq \ell n\,\frac{n}{n+x} \leq \ell n\,\frac{n}{n+a}\,;$$

et si $x \in [0, b]$:

$$|R_n(x)| \leq \ell n\left(\frac{n+x}{n}\right) \leq \ell n\,\frac{n+b}{n}$$

et dans tous les cas :

$$|R_n(x)| \leq \ell n\,\frac{n}{n+a} + \ell n\,\frac{n+b}{n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |R_n(x)| \leq \ell n\,\frac{n+b}{n+a}.$$

Il en résulte :

$$\|R_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \ell n\,\frac{n+b}{n+a}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$$

ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Puisqu'il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[a, b]$, on en déduit que la restriction à $[a, b]$ de la somme f est continue sur $[a, b]$ donc, la continuité étant une propriété locale et chaque réel $x \in \left]-1, +\infty\right[$ admettant un voisinage de la forme $[a, b]$ avec $-1 < a < b$, il vient enfin que f est continue sur $\left]-1, +\infty\right[$.

Les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1, +\infty\right[$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, u_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}.$$

Pour tout $x > -1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n'(x)$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées ($\lim_{n\to+\infty} u_n'(x) = 0$ et la suite $\left(|u_n'(x)|\right)_{n\geq 1}$ est décroissante). En posant :

or :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(-1)^{k-1}t^{k+x-1}=\int_0^1 t^x\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^x\frac{1+(-1)^{n+1}t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et avec $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^{n+x}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+x+1}$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t=0.$$

D'où finalement :

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(-1)^{k-1}t^{n+x-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

4) f' est une fonction positive et on a :

$$f(x)=\int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

donc, si on est dans le cas favorable, c'est-à-dire si f' est non intégrable sur $[0,+\infty[$, nous obtiendrons un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ avec un théorème d'intégration des équivalences.

Pour tout $x>0$, le changement de variable défini par $u=t^{x+1}$ donne :

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\frac{1}{x+1}}}=\frac{1}{x+1}\,\Phi\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

où on a posé $\Phi(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^x}=\int_{]0,1]}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^x}$.

La fonction $\varphi\ :\ (u,x)\mapsto\dfrac{1}{1+u^x}$ est continue sur $]0,1]\times[0,+\infty[$ comme composée de telles fonctions :

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+e^{x\,\ell n\,u}}$$

et elle est dominée par la fonction constante $u\mapsto 1$ qui est intégrable sur $]0,1]$. Donc le théorème de continuité sous le signe somme avec hypothèse de domination globale (valable pour $x\in[0,+\infty[$) donne que Φ est continue sur $[0,+\infty[$. En conséquence, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\Phi\left(\frac{1}{x+1}\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$$

puis :

$$f'(x)\sim\frac{1}{2(x+1)}\text{ quand }x\text{ tend vers }0.$$

La fonction :

$$x\mapsto\frac{1}{x+1}$$

étant continue, positive sur $[0,+\infty[$ et non intégrable sur cet intervalle, le théorème d'intégration des équivalences (qui est peut-être à redémontrer pour être conforme au nouveau programme) donne, dans le cas des fonctions positives non intégrables :

$$f(x)\underset{+\infty}{\sim}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2(t+1)}=\frac{1}{2}\,\ell n(x+1)\quad\text{soit aussi}\quad f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,\ell n\,x.$$

(H) Fonctions définies par une intégrale

Ex. 32

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathcal{D}$.

3) Déterminer les limites et des équivalents simples de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

1) Soit $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$, φ_x est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $\varphi_x(t) \sim \dfrac{1}{t^x}$ donc φ_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x<1$.

Au voisinage de $+\infty$, $\varphi_x(t) \sim \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc φ_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x>0$.

En conclusion, on a $\mathcal{D} =]0,1[$.

> Rappelons que φ_x étant positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x$ a un sens si et seulement si φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2)
> Si besoin, c'est le moment de revoir le cours concernant la dérivation sous le signe somme.

On définit une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\times]0,+\infty[$ en posant :

$$\forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[,\ g(x,t) = \frac{e^{-x\ln t}}{1+t}$$

et on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n(\ln t)^n\frac{e^{-x\ln t}}{1+t}.$$

Nous allons montrer, par récurrence sur n, que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,1[$ avec :

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

propriété que nous notons (H_n).

Prouvons (H_1).

- Pour tout $x \in]0,1[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ et il en est de même pour :

$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t).$$

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,1[$.
- Pour tout $(a,b) \in]0,1[^2$, tel que $a<b$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$$

où on a posé :

$$\varphi_1(t) = \frac{|\ell n\, t|}{t^b(1+t)} \text{ si } 0 < t \leqslant 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = \frac{|\ell n\, t|}{t^a(1+t)} \text{ si } t > 1.$$

Cette fonction φ_1 est continue, positive, intégrable sur $]0, +\infty[$ car :

$$\varphi_1(t) = o\left(t^{-\frac{b+1}{2}}\right) \text{ quand } t \to 0, \text{ avec } \frac{b+1}{2} < 1$$

$$\varphi_1(t) = o\left(t^{-\left(1+\frac{a}{2}\right)}\right) \text{ quand } t \to +\infty, \text{ avec } 1 + \frac{a}{2} > 1$$

Ainsi le théorème de dérivation sous le signe somme, avec hypothèse de domination locale, donne que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a, b] \subset]0, 1[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et la formule de Leibniz donne :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ell n\, t}{t^x(1+t)}\, dt.$$

> Remarquons que le théorème du cours ne réclame, au niveau des fonctions partielles en t, que la continuité par morceaux, ce que nous obtenons en observant la continuité : «qui peut le plus, peut le moins».

Prouvons maintenant l'hérédité : $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec :

$$\forall x \in]0, 1[, f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n(\ell n\, t)^n}{t^x(1+t)}\, dt.$$

En posant :

$$g_n(x, t) = \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n(\ell n\, t)^n}{t^x(1+t)},$$

le même raisonnement que précédemment, en remplaçant g par g_n et φ_1 par φ_{n+1} telle que :

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{|\ell n\, t|^{n+1}}{t^b(1+t)} \quad \text{si } 0 < t \leqslant 1$$

$$\text{et} \quad \varphi_{n+1}(t) = \frac{|\ell n\, t|^{n+1}}{t^a(1+t)} \quad \text{si } t > 1$$

montre que $f^{(n)} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x, t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]0, 1[$, avec :

$$\forall x \in]0, 1[, f^{(n+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\ell n\, t)^{n+1}}{t^x(1+t)}\, dt.$$

En conclusion, il apparait par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^n$, donc qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$.

La convexité est alors une conséquence de la positivté de f'' :

$$\forall x \in]0, 1[, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\ell n\, t)^2}{t^x(1+t)}\, dt.$$

3)

> Pour $x = 0$, la fonction φ_0 est non intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, «à cause» de la borne $+\infty$. Nous allons donc baser l'étude de f au voisinage de 0 sur le fait que :
>
> $$\varphi_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}} \text{ quand } t \to +\infty.$$

La fonction φ_x étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^{x+1}} = \frac{1}{2x}\left[-t^x\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2x}$$

donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

Pour la recherche d'un équivalent, quand $x \to 0$, nous commençons par «isoler» la borne $+\infty$.

En remarquant que pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

donc que $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$ est bornée quand x décrit $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, et sachant que :

$$\lim_{x \to 0} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} = +\infty,$$

on obtient :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}.$$

Formons alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}(1+t)}$.

Avec $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+2}} = \frac{1}{x+1}$, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}(1+t)} = \mathcal{O}(1) \text{ quand } x \to 0$$

et, puisque $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} = +\infty$, il vient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} + o\left(\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \underset{x \to 0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}.$$

Finalement, quand $x \to 0$, on a :

$$f(x) \sim \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{x}.$$

Pour x tendant vers 1, le problème est l'inverse du précédent : c'est maintenant l'intégrale sur $]0, 1]$ qui est dominante et il faut exploiter que, lorsque $t \to 0$:

$$\frac{1}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{t^x}.$$

On remarque d'abord que :

$$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{2(1-x)}.$$

et il en résulte $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

Avec, pour $x > \frac{1}{2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$, on voit que : $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$ est bornée au voisinage de 1 et donc :

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}.$$

Formons alors :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{x-1}(1+t)}.$$

Puisque $x \mapsto t^{-x}$ est croissante $\left(t \in \left]0,1\right]\right)$, on obtient :

$$\forall x \in \left]0,1\right], 0 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{x-1}(1+t)} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{x-1}(1+t)}$ est bornée et donc :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{1-x}.$$

Finalement, quand $x \to 1$, on a :

$$f(x) \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}.$$

Ex. 33

1) Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

2) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

1)

Il saute aux yeux que $G : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est une primitive sur $\left]0,+\infty\right[$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$.

La méthode est donc claire :

1) on étudie la dérivabilité de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on vérifie que $F'(x) = G'(x)$;

2) on compare les valeurs prises par $F(x)$ et $G(x)$ en un point x pour conclure.

En fait, nous allons commencer par préciser la fonction G, car sa définition pose quelques petits problèmes.

Au voisinage de 1, on a $\ln t = \ln(1+t-1) \sim t-1$ donc :

$$\frac{\ln t}{t^2-1} \sim \frac{1}{t+1} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$g(1) = \frac{1}{2} \text{ et } g(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

D'autre part, on a au voisinage de 0 :

$$g(t) \sim -\ln t \text{ donc } g(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et g est intégrable sur tout intervalle $]0, x]$ avec $x > 0$. On en déduit que :

$$G : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = g(x)$ et aussi que $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{t}\right)}{1 + t^2}$.

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leqslant f(x, t) \leqslant \frac{\pi}{2\left(1 + t^2\right)}$$

donc pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ce qui assure que :

$$F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Le calcul donne $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \dfrac{t}{\left(1 + t^2\right)\left(x^2 + t^2\right)}$ donc pour tout $a > 0$ fixé, on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leqslant \frac{t}{\left(1 + t^2\right)\left(a^2 + t^2\right)}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{\left(1 + t^2\right)\left(a^2 + t^2\right)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur cet intervalle car $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ donc le théorème de dérivation sous le signe somme avec domination globale nous donne que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai quel que soit $a > 0$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1 + t^2\right)\left(x^2 + t^2\right)}\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1 + u)\left(x^2 + u\right)} \quad (\text{en posant } u = t^2).$$

On peut maintenant expliciter $F'(x)$.

Pour $x \neq 1$, une décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{(1 + u)\left(x^2 + u\right)} = \frac{1}{x^2 - 1}\left(\frac{1}{1 + u} - \frac{1}{x^2 + u}\right)$$

c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

En conclusion, on a :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$$

1 Calcul d'une intégrale par prolongement continu

1) Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,dt$ si cette intégrale a un sens.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de F.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in D$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,dt$.

c) Montrer que F est continue sur D.

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\phi \neq 0$. On pose :

$$A_m(\phi) = \sin\phi + \sin\ 3\phi + \cdots + \sin(2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{m-1} \sin(2k+1)\phi$$

$$B_m(\phi) = \cos\phi + \cos\ 3\phi + \cdots + \cos(2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{m-1} \cos(2k+1)\phi$$

a) Démontrer les relations : $2\sin\phi\ A_m(\phi) = 1 - \cos 2m\phi$, $2\sin\phi\ B_m(\phi) = \sin 2m\phi$.

b) En déduire une expression, en fonction de m, $\sin\phi$, $\cos\phi$, $\sin 2m\phi$ et $\cos 2m\phi$ de chacune des deux sommes :

$$C_m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)\sin(2k+1)\phi \quad \text{et} \quad D_m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k-1)\sin(2k+1)\phi.$$

3) Soit m et p deux entiers tels que $1 \leqslant p < 2m$.
On considère la fonction R de la variable t, définie par :

$$R(t) = \frac{t^{p-1} + t^{2m-p-1}}{1+t^{2m}}.$$

Les zéros du polynôme $1 + t^{2m}$ sont les nombres complexes de la forme :

$$e^{i\omega_k} \quad \text{où} \quad \omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m},\ (k \in \mathbb{Z}).$$

a) Démontrer la relation $R(t) = \displaystyle\frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sin\omega_k \sin p\omega_k}{t^2 - 2t\cos\omega_k + 1}$.

b) Calculer l'intégrale :

$$I(2m,p) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} R(t)\,dt$$

après avoir prouvé son existence, et démontrer la relation :

$$I(2m,p) = \frac{\pi}{2m\sin\left(\dfrac{p\pi}{2m}\right)}.$$

4) Calculer $F(\alpha)$ pour tout $\alpha \in D$.

Solution

1) a) Introduisons les fonctions :

$$f \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ (\alpha, t) \mapsto \frac{1 + t^{\alpha-2}}{1 + t^{\alpha}}$$

et, pour α réel fixé :

$$f_\alpha \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(\alpha, t).$$

Il est clair que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, $F(\alpha)$ a un sens si et seulement si f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si et seulement si elle est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

Examinons d'abord les deux cas particuliers : $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$.

- $f_0 \;:\; t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)$ est non intégrable sur $]0, 1]$ car, lorsque t tend vers 0, on a $f_0(t) \sim \dfrac{1}{2t^2}$.

Elle est donc non intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

> On aurait tout aussi bien pu remarquer que f_0 est non intégrable sur $[1, +\infty[$ car, lorsque t tend vers $+\infty$, $f_0(t) \sim \dfrac{1}{2}$.

- Il est bien connu que $f_2 \;:\; t \mapsto \dfrac{2}{1 + t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous supposons maintenant $\alpha \notin \{0, 2\}$.

- Étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$.

> On donne suivant les valeurs de α un équivalent simple de $f_\alpha(t)$ au voisinage de 0, ce qui permet de conclure avec la règle de Riemann.

Si $\alpha < 0$, $f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc f_α est non intégrable sur $]0, 1]$.

Si $0 < \alpha < 2$, $f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ donc f_α est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $2 - \alpha < 1$ c'est-à-dire $\alpha > 1$.

Si $\alpha > 2$, $f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} 1$ donc f_α est intégrable sur $]0, 1]$.

En conclusion, f_α est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

- Étude de l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

> Sachant qu'une fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle l'est sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, on se limite maintenant à $\alpha > 1$ et on procède comme précédemment par équivalents.

Si $1 < \alpha < 2$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ ce qui, compte tenu de $\alpha > 1$ donne que f_α est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si $\alpha > 2$, $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc f_α est intégrable sur $[1, +\infty[$.

> Il reste maintenant à regrouper les résultats.

- En résumé, f_α est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, c'est-à-dire que l'ensemble de définition de F est $D =]1, +\infty[$.

b) L'application $\theta\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t}$ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$.

Dans ces conditions, le changement de variable défini par $u = \dfrac{1}{t}$ donne :

$$\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1+u^{\alpha-2}}{1+u^\alpha}\,\mathrm{d}u.$$

Avec la relation de Chasles, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{+\infty} \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

c) La question précédente nous permet de considérer que F est définie sur D par :

$$F\ :\ \alpha \mapsto 2\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

> L'intérêt de cette observation tient au fait que l'intégrale sur $]0,1]$ ne présente qu'un seul «problème d'intégrabilité» alors que l'intégrale sur $]0,+\infty[$ en présente deux !
> Par ailleurs, il ne s'agit vraisemblablement ici que de l'application soigneuse d'un théorème de continuité dominée, et il ne faut pas perdre de vue qu'une domination locale permet souvent de conclure.

On remarque d'abord que la fonction $f\ :\ (\alpha,t) \mapsto \dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]1,+\infty[\times]0,1]$.

> Ce qui assure la vérification des hypothèses du théorème vu en cours : continuité par rapport à la variable α et continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration.

Fixons maintenant a, b, réels tels que $1 < a < 2 < b$. Sachant que pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto t^x$ est décroissante, on obtient :

$$\forall\,\alpha \in [a,b],\quad \forall t \in]0,1],\quad 0 < f(\alpha,t) \leqslant \frac{1+t^{a-2}}{1+t^b}.$$

La fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{1+t^{a-2}}{1+t^b}$ est continue et intégrable sur $]0,1]$ car $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-a}}$ avec $2-a<1$.
Elle nous donne donc l'hypothèse de domination qui, avec le théorème de continuité dominée, montre que F est continue sur $[a,\ b]$.
Tout point $\alpha \in]1,+\infty[$ admettant un voisinage de la forme $[a,\ b]$ et la continuité étant une propriété locale, il en résulte que F est continue sur $]1,+\infty[$.

2) a)

> Les réponses étant données dans l'énoncé, on peut se contenter de simples vérifications.

Formons
$$\begin{aligned}
2\sin\phi\, A_m(\phi) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2\sin\phi\sin(2k+1)\phi\\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \big(\cos 2k\,\phi - \cos 2(k+1)\,\phi\big)\\
&= 1-\cos 2m\,\phi \quad \text{après télescopage.}
\end{aligned}$$

De même
$$\begin{aligned}
2\sin\phi\, B_m(\phi) &= \sum_{k=0}^{m-1} 2\sin\phi\cos(2k+1)\phi\\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \big(\sin 2(k+1)\,\phi - \sin 2k\,\phi\big)\\
&= \sin 2m\,\phi \quad \text{après télescopage.}
\end{aligned}$$

b) Une dérivation permet de faire le lien avec les calculs précédents.

$$C_m(\phi) = -B'_m(\phi) = -m\frac{\cos 2m\phi}{\sin\phi} + \frac{\sin 2m\,\phi\cos\phi}{2\sin^2\phi}$$

$$D_m(\phi) = 2mA_m(\phi) - C_m(\phi) = \frac{m}{\sin\phi} - \frac{\sin 2m\,\phi\cos\phi}{2\sin^2\phi}$$

3) a) Il s'agit bien sûr ici de décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis de regrouper les parties polaires relatives aux pôles conjugués.

Les zéros de $1 + t^{2m}$ sont les $e^{i\omega_k}$, $0 \leqslant k \leqslant 2m-1$, avec $e^{i\omega_{2m-1-k}} = e^{-i\omega_k}$.

On a donc $\quad R(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda_k}{t - e^{i\omega_k}} + \frac{\overline{\lambda}_k}{t - e^{-i\omega_k}}\right)$.

Avec $\lambda_k = \left(\dfrac{t^{p-1} + t^{2m-p-1}}{2mt^{2m-1}}\right)_{(t=e^{i\omega_k})}$ et $e^{2im\omega_k} = -1$, on obtient :

$$\lambda_k = \frac{e^{i(p-1)\omega_k} - e^{-i(p+1)\omega_k}}{-2me^{-i\omega_k}} \quad \text{d'où} \quad \lambda_k = -\frac{i}{m}\sin p\omega_k,$$

et, en reportant dans la décomposition de $R(t)$, il vient :

$$R(t) = \frac{i}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\sin p\omega_k}{t - e^{-i\omega_k}} - \frac{\sin p\omega_k}{t - e^{i\omega_k}}\right)$$

$$\boxed{R(t) = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\sin\omega_k \sin p\omega_k}{t^2 - 2t\cos\omega_k + 1}}$$

b) La fonction R est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{t^{p-1}}{1+t^{2m}} \sim \dfrac{1}{t^{2m-p+1}}$ et $2m - p + 1 \geqslant 2$, donc $t \mapsto \dfrac{t^{p-1}}{1+t^{2m}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$;

de même $\dfrac{t^{2m-p-1}}{1+t^{2m}} \sim \dfrac{1}{t^{p+1}}$ et $p + 1 \geqslant 2$ donc $t \mapsto \dfrac{t^{2m-p-1}}{1+t^{2m}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi R est intégrable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions intégrables.

La formule du a) précédent permet de décomposer $\int_0^{+\infty} R(t)\,\mathrm{d}t$ en une somme de m intégrales, mais il ne faut pas oublier de contrôler que chacune d'elles a un sens.

Chaque fonction $\varphi_k \ : \ t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2t\cos\omega_k + 1}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $\varphi_k(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$). Il vient donc, en utilisant la décomposition de $R(t)$:

$$\begin{aligned} I(2m, p) &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin p\,\omega_k \int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega_k}{\left(t - \cos\omega_k\right)^2 + \sin^2\omega_k}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sin p\,\omega_k\left[\operatorname{Arctan}\frac{t - \cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$, on a $\sin\omega_k > 0$ d'où :

$$I(2m,p) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(-\operatorname{cotan}\omega_k)\right]\sin p\omega_k\,.$$

En notant que $-\operatorname{cotan}\omega_k = \tan\left(\omega_k - \frac{\pi}{2}\right)$ et que $\omega_k - \frac{\pi}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient :

$$\operatorname{Arctan}\left(-\operatorname{cotan}\omega_k\right) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\omega_k - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \omega_k - \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$I(2m,p) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\pi - \omega_k\right)\sin p\omega_k$$

ou encore $I(2m,p) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k-1)\frac{\pi}{2m}\sin(2k+1)p\frac{\pi}{2m}$

$$= \frac{\pi}{2m^2}D_m\left(\frac{p\pi}{2m}\right)$$

Donc, d'après 1) b), $\quad I(2m,p) = \dfrac{\pi}{2m\sin\dfrac{p\pi}{2m}}$.

4)

> Puisque l'on nous a fait démontrer que F est continue sur D, il s'agit probablement ici d'un problème de prolongement continu. utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Dans un premier temps, il paraît donc nécessaire d'exprimer $I(2m,p)$ en fonction de F.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $u \mapsto t = u^{\frac{1}{p}}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. Donc, avec $\mathrm{d}t = \frac{1}{p}u^{\frac{1-p}{p}}\,\mathrm{d}u$, le changement de variable défini par $t = u^{\frac{1}{p}}$ donne :

$$I(2m,p) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}+t^{2m-p-1}}{1+t^{2m}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2p}\int_0^{+\infty}\frac{1+u^{\frac{2m}{p}-2}}{1+u^{\frac{2m}{p}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2p}F\left(\frac{2m}{p}\right).$$

Tout réel α de $]1,+\infty[$ est limite d'une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rationnels, et chacun des r_k admet un représentant de la forme $\dfrac{2m_k}{p_k}$ avec $(m_k,p_k) \in \mathbb{N}^{*2}$. Puisque $\alpha > 1$, on a aussi $r_k > 1$ c'est-à-dire $1 \leqslant p_k < 2m_k$, au moins à partir d'un certain rang k_0.

Ainsi, pour $k \geqslant k_0$, les calculs précédents donnent :

$$F(r_k) = 2p_kI(2m_k,p_k) = \frac{p_k\pi}{m_k\sin\dfrac{p_k\pi}{2m_k}} = \frac{2\pi}{r_k\sin\dfrac{\pi}{r_k}}\,.$$

Par continuité de F au point α, on en déduit :

$$F(\alpha) = \frac{2\pi}{\alpha\sin\dfrac{\pi}{\alpha}}\,.$$

2 La fonction Gamma : formule des compléments

1) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f_n et montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f_n(x) = \frac{n!n^x}{\prod_{p=0}^{n}(x+p)}.$$

2) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

3) Montrer que pour un réel x convenable :

$$\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right).$$

4) Montrer que les polynômes :

$$P_p(X) = \left(1 + \frac{iX}{2p}\right)^{2p} - \left(1 - \frac{iX}{2p}\right)^{2p}$$

$$\text{et}\quad Q_p(X) = 2iX \prod_{k=1}^{p-1}\left(1 - \frac{X^2}{4p^2\tan^2\frac{k\pi}{2p}}\right)$$

sont égaux.

5) Justifier la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Solution

1) La fonction $\varphi_n \;:\; t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est continue sur $]0, n]$ et au voisinage de 0, on a :

$$\varphi_n(t) \sim t^{x-1}.$$

Elle est donc intégrable sur $]0, n]$ si et seulement si $x > 0$. Puisqu'en outre elle est positive, $\int_0^n \varphi_n$ a un sens si et seulement si φ_n est intégrable sur $]0, x]$, et on en déduit $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
Par intégrations par parties itérées, on obtient :

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\left[t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n + \frac{n}{x\cdot n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{x\cdot n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$f_n(x) = \frac{n}{x(x+1)n}\left[t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right]_0^n + \frac{n(n-1)}{x(x+1)n^2}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n(n-1)}{x(x+1)n^2}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\mathrm{d}t$$

...

$$f_n(x) = \frac{n(n-1)\ldots 1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$f_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\cdot\frac{n^{x+n}}{n^n}$$

soit :
$$f_n(x) = \frac{n!n^x}{\prod_{p=0}^{n}(x+p)} \qquad (1)$$

2) Une bonne lecture de l'énoncé est utile : le résultat de la question 3) va se déduire de la formule (1) précédente et de $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. En conséquence, cette limite doit être établie à partir de l'expression initiale de f_n, au moyen du théorème de convergence dominée.

Pour $x > 0$, introduisons les fonctions $g_{x,n}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} g_{x,n}(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leqslant n \\ g_{x,n}(t) = 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Chaque $g_{x,n}$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \int_{]0,+\infty[} g_{x,n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dès que $n \geqslant t$, on a :

$$g_{x,n}(t) = t^{x-1}e^{n\,\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = t^{x-1}e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} g_{x,n}(t) = e^{-t}t^{x-1}.$$

Ainsi la suite $\left(g_{x,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $g_x\ :\ t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

En remarquant que, par concavité de $\ln$, on a $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $|g_{x,n}(t)| = g_{x,n}(t) \leqslant g_x(t)$, le théorème de convergence dominée nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} g_{x,n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} g_x(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x) \qquad (2)$$

On a ainsi retrouvé la fonction Gamma étudiée en cours.

3) La fonction Γ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ ont un sens simultanément si et seulement si $0 < x < 1$.

D'après (1) et (2), on a pour tout $x \in \left]0, 1\right[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{p=1}^{n}(x+p)\prod_{p=0}^{n}(1-x+p)}{n!\,n^x\,n!\,n^{1-x}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-x}{n}\cdot\frac{1}{(n!)^2}\prod_{p=1}^{n}(x+p)\prod_{p=1}^{n}(p-x)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

On peut donc aussi écrire :

$$\frac{1}{x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \prod_{p=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right).$$

Vraisemblablement, ce n'était pas fait dans cet énoncé parce que l'étude systématique des produits infinis n'est pas au programme de la classe.

4) Pour s'assurer de l'identé de deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, il suffit de comparer leurs racines et l'un de leurs coefficients.

On remarque que P_p et Q_p sont des polynômes de degré $2p-1$.

Il est clair que les racines de Q_p sont 0 et $\pm 2p\tan\frac{k\pi}{2p}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, soit $2p-1$ racines réelles distinctes.

Par ailleurs, l'équation $P_p(x) = 0$ n'admet pas $-\frac{2p}{i}$ pour racine, elle s'écrit donc :

$$\left(\frac{1-\frac{ix}{2p}}{1+\frac{ix}{2p}}\right)^{2p} = 1.$$

En conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned}P_p(x) = 0 &\iff \exists k \in [\![1-p, p]\!],\ 1-\frac{ix}{2p} = e^{i\frac{k\pi}{p}}\left(1+\frac{ix}{2p}\right)\\ &\iff \exists k \in [\![1-p, p]\!],\ \frac{ix}{2p}\left(1+e^{\frac{ik\pi}{p}}\right) = 1-e^{\frac{ik\pi}{p}}\end{aligned}$$

Lorsque k décrit $[\![1-p, p]\!]$ on obtient $e^{\frac{ik\pi}{p}} = -1$ si et seulement si $k = p$, d'où :

$$P_p(x) = 0 \iff k \in [\![1-p, p-1]\!],\ x = \frac{2p}{i}\cdot\frac{1-e^{\frac{ik\pi}{p}}}{1+e^{\frac{ik\pi}{p}}}$$

Avec :

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{1-e^{\frac{ik\pi}{p}}}{1+e^{\frac{ik\pi}{p}}}=\frac{e^{\frac{-ik\pi}{2p}}-e^{\frac{ik\pi}{2p}}}{2i}\cdot\frac{2}{e^{\frac{-ik\pi}{2p}}+e^{\frac{ik\pi}{2p}}}=-\frac{\sin\dfrac{k\pi}{2p}}{\cos\dfrac{k\pi}{2p}}=-\tan\frac{k\pi}{2p},$$

on en déduit que les racines de P_p sont les $2p-1$ réels distincts :

$$0,\quad \pm 2p\tan\frac{k\pi}{2p},\quad 1\leqslant k\leqslant p-1.$$

À ce niveau, on peut affirmer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $Q_p=\lambda P_p$.

Remarquons alors que dans P_p le coefficient de X est $2i$. Comme il en est de même dans Q_p, on a $\lambda=1$ et $Q_p=P_p$.

5) Manifestement, il faut faire le lien entre les questions 3) et 4).

Il est visible que :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4p^2\tan^2\big((k\pi)/(2p)\big)}\right)=1-\frac{x^2}{k^2\pi^2},$$

on peut donc espérer pouvoir démontrer que :

$$\lim_{p\to+\infty}Q_p(x)=2ix\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

En tenant compte de 3) et de $Q_p=P_p$, il en résultera alors :

$$\lim_{p\to+\infty}P_p(\pi x)=2i\pi x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{2i\pi}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}$$

Étant donné x fixé dans $]0,1[$, commençons par évaluer $\lim\limits_{p\to+\infty}R_p(x)$ où on a posé :

$$R_p(x)=\prod_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{x^2}{4p^2\tan^2\dfrac{k\pi}{2p}}\right)$$

donc

$$\ln R_p(x)=\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(1-\frac{x^2}{4p^2\tan^2\dfrac{k\pi}{2p}}\right).$$

Pour être en mesure d'utiliser les théorèmes généraux sur les séries de fonctions, nous allons écrire $\ln R_p$ comme somme d'une telle série.

Il faut prendre garde à ne pas se tromper de variable : ce doit être p, de façon à pouvoir étudier une limite quand $p\to+\infty$.

Pour $x\in\,]0,1[$, $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, et $k\in\mathbb{N}^*$, définissons $u_{x,k}$ par :

$$\begin{cases} u_{x,k}(t)=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{4t^2\tan^2\dfrac{k\pi}{2t}}\right) & \text{si } t\geqslant k+1\\ u_{x,k}(t)=0 & \text{si } t<k+1\end{cases}$$

on a alors :

$$\ln R_p(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_{x,k}(p)$$

et, pour tout (x, k) :

$$\lim_{t \to +\infty} u_{x,k}(t) = \ell n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto -\ell n \left(1 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ donc, avec $\tan x \geqslant x$ pour tout $I \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient :

$$\forall t \in [k+1, +\infty[, 4t^2 \tan \frac{k\pi}{2t} \geqslant k^2 \pi^2$$

d'où :

$$-\ell n \left(1 - \frac{x^2}{4t^2 \tan^2 \dfrac{k\pi}{2t}}\right) \leqslant -\ell n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$|u_{x,k}(t)| \leqslant -\ell n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Cette inégalité reste vraie pour $t \in [1, k+1[$ puisqu'alors $u_{x,k}(t) = 0$.

En conséquence, on obtient :

$$\|u_{x,k}\|_\infty^{[1,+\infty[} \leqslant -\ell n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

et, puisque $\ell n \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$ est le terme général d'une série convergente, la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 1} u_{x,k}$ converge normalement donc uniformément sur $[1, +\infty[$.

Dans ces conditions, le théorème de la limite terme à terme s'applique et donne :

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{x,k}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{t \to +\infty} u_{x,k}(t)$$

donc

$$\lim_{p \to +\infty} \ell n\, R_p(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, il vient enfin :

$$\lim_{p \to +\infty} R_p(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \text{ donc } \lim_{p \to +\infty} Q_p(\pi x) = 2i\,\pi\, x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Compte tenu de la formule (3) et de $Q_p = P_p$, on en déduit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{p \to +\infty} P_p(\pi x)$$

soit aussi :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \lim_{p \to +\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{i\,\pi\, x}{2p}\right)^{2p} - \left(1 - \dfrac{i\,\pi\, x}{2p}\right)^{2p}}{2i\pi}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, l'étude de $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ est une question classique. Voir, par exemple, *Précis d'Analyse, MP*, chapitre 3, Éditions Bréal.

Avec $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$, on obtient finalement :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i\pi} = \frac{\sin \pi x}{\pi}$$

donc :

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

3 Fonctions harmoniques – Principe du maximum Propriété de la moyenne

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf, définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Partie A. Quelques exemples de fonctions harmoniques

1) Démontrer que les fonctions complexes f et g_n, $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x,y) = e^{x+iy} \quad , \quad g_n(x,y) = (x+iy)^n.$$

2) Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2, définies sur la demi-droite ouverte $\left]0,+\infty\right[$, telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O ($\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$) par la relation ci-dessous, soit harmonique :

$$h(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

3) Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2, définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $y'Oy$ ($\mathbb{R}^2 \setminus y'Oy$) par la relation ci-dessous, soit harmonique :

$$k(x, y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x, y) = (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}.$$

4) Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_{n|K}$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ, définie par la relation suivante :

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, y),$$

est continue dans le plan.

5) Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Partie B. Principe du maximum

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r ($r > 0$) ; soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r :

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}.$$

Étant donné un entier strictement positif p ($p > 0$), soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

6) Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p appartenant au disque fermé $\mathcal{D}$ en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p\left(a_p, b_p\right) = \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} f_p(x, y).$$

7) Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque $\mathcal{D}$, les deux dérivées secondes de la fonction f_p, obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y, sont, en ce point M_p, négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}\left(a_p, b_p\right) \leqslant 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}\left(a_p, b_p\right) \leqslant 0.$$

8) En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p, que le point M_p est situé sur le cercle $\mathcal{C}$.

9) Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle $\mathscr{C}$ en lequel la fonction f atteint son maximum sur $\mathscr{D}$:

$$f(a, b) = \max_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x, y).$$

Énoncer et démontrer un résultat analogue dans lequel le disque $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$ sont de centre $A = (x_0, y_0)$ quelconque.

10) En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$, égales le long d'un cercle $\mathscr{C}$ du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque $\mathscr{D}$ de frontière $\mathscr{C}$.

Partie C. Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, +\infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f\left(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

11) Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$.

12) Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.

13) Démontrer que le produit $\rho \cdot F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x, y)\,\mathrm{d}x + B(x, y)\,\mathrm{d}y$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho \cdot F'(\rho) = \int_\Gamma \left(A(x, y)\,\mathrm{d}x + B(x, y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ.

14) Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.

15) Soit $\mathscr{D}$ le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) de rayon r ($r > 0$) ; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f, étendue au disque $\mathscr{D}$, se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi r^2 f(x_0, y_0).$$

Partie D. Fonctions harmoniques bornées dans le plan

Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x, y) du plan :

$$|f(x, y)| \leqslant C.$$

16) Soit deux disques fermés $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0, de coordonnées respectives $(0,0)$ et (x_0, y_0). Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r ($0 < d < r$). Soit L_2 l'ensemble des points du disque $\mathcal{D}_2$ qui ne sont pas dans le disque $\mathcal{D}_1$.

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi r d$.

17) À l'aide par exemple de la question 15), donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0,0)$ au moyen de la constante C, du rayon r et de d.

En déduire que la fonction est constante.

Solution

Partie A. Exemples de fonctions harmoniques

1) ▪ $f\ :\ (x,y) \mapsto e^{x+iy}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+iy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ie^{x+iy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x+iy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{x+iy}$$

donc :

$$\Delta f(x,y) = 0.$$

▪ $g\ :\ (x,y) \mapsto (x+iy)^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^2$ et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = n(x+iy)^{n-1}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = in(x+iy)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = n(n-1)(x+iy)^{n-2}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -n(n-1)(x+iy)^{n-2}$$

donc :

$$\Delta g(x,y) = 0.$$

2) La fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$:

$$h\ :\ (x,y) \mapsto u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ comme composée de telles fonctions et, en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{r}u'(r)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{r}u'(r) - \frac{x^2}{r^3}u'(r) + \frac{x^2}{r^2}u''(r).$$

De même, h étant symétrique en (x,y), on obtient :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{r}u'(r) - \frac{y^2}{r^3}u'(r) + \frac{y^2}{r^2}u''(r)$$

Hidden page

Avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) = (-1)^n \frac{n(x+iy)^{n-1}}{(2n)!}, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) = (-1)^n \frac{in(x+iy)^{n-1}}{(2n)!}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, y) = (-1)^n \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}, \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \, \partial y}(x, y) = (-1)^n \frac{in(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x, y) = (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}.$$

On montre, comme dans le 4), la convergence normale sur tout compact K des séries de fonctions :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \ \sum_{n \geq 0} \frac{\partial u_n}{\partial y}, \ \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \, \partial y} \ \text{ et } \ \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}.$$

Les théorèmes généraux donnent alors la classe $\mathcal{C}^2$ de φ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)(x+iy)^{n-2}}{(2n)!}$$

donc :

$$\Delta \varphi(x, y) = 0.$$

Partie B. Principe du maximum

6) Puisque f_p est continue sur le compact $\mathcal{D}$, elle est bornée sur $\mathcal{D}$ et atteint ses bornes. En particulier, il existe $(a_p, b_p) \in \mathcal{D}$ tel que :

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y) \in \mathcal{D}} f_p(x, y).$$

7) Si $M_p = (a_p, b_p)$ appartient à $\mathring{\mathcal{D}}$, le compact $\mathcal{D}$ est un voisinage de M_p et $f_p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ présente en M_p un maximum local donc :

$$\frac{\partial f_p}{\partial x}(a_p, b_p) = \frac{\partial f_p}{\partial y}(a_p, b_p) = 0.$$

De plus, chaque fonction partielle de f_p admet un développement limité d'ordre 2 :

$$f_p(a_p + h, b_p) = f_p(a_p, b_p) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) + o(h^2)$$

$$f_p(a_p, b_p + k) = f_p(a_p, b_p) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) + o(k^2)$$

Sachant qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f_p(a_p + h, b_p) - f_p(a_p, b_p) \leq 0$ pour tout $h \in \left] -\alpha, \alpha \right[$, le premier développement donne :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

On obtient même $\dfrac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leqslant 0$ avec le deuxième développement.

8) Le calcul donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{2}{p}\ ,\ \ \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + \frac{2}{p}.$$

donc :

$$\Delta f_p(x,y) = \Delta f(x,y) + \frac{4}{p} = \frac{4}{p}.$$

Or, d'après le 7), si $M_p = (a_p, b_p)$ appartient à $\overset{\circ}{\mathscr{D}}$, on a $\Delta f_p(a_p, b_p) \leqslant 0$, ce qui est en contradiction avec $\Delta f_p(a_p, b_p) = \dfrac{4}{p} > 0$. En conséquence, le point M_p appartient à $\mathscr{C} = \mathscr{D} \setminus \overset{\circ}{\mathscr{D}}$.

9) $\mathscr{C}$ est également un compact de $\mathbb{R}^2$ donc, de la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de points de $\mathscr{C}$, on peut extraire une suite $(M_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers $P \in \mathscr{C}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D},\ f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p_k} \leqslant f(a_{p_k}, b_{p_k}) + \frac{a_{p_k}^2 + b_{p_k}^2}{p_k}.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, par continuité de f au point $P = (a,b)$ et puisque p_k tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} f(a_{p_k}, b_{p_k}) = f(a,b) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{p_k}^2 + b_{p_k}^2}{p_k} = 0$$

donc l'inégalité précédente donne à la limite :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D},\ f(x,y) \leqslant f(a,b).$$

On a donc bien $f(a,b) = \max\limits_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y)$ avec $(a,b) \in \mathscr{C}$.

Dans le cas où $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sont de centre $A = (x_0, y_0)$:

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2\right\}$$

$$\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\right\}.$$

on considère la fonction :

$$g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x_0 + x, y_0 + y)$$

celle-ci est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et harmonique car :

$$\Delta g(x,y) = \Delta f(x_0 + x, y_0 + y).$$

Notons maintenant $\mathscr{D}_O$ le disque fermé de centre O et de rayon r et $\mathscr{C}_O$ le cercle de centre O et de rayon r.

D'après le résultat précédent, le maximum de g sur $\mathscr{D}_O$ est atteint en un point $P = (a,b)$ de $\mathscr{C}_O$ donc le maximum de f sur $\mathscr{D}$ est atteint en un point $Q = (x_0 + a, y_0 + b)$ de $\mathscr{C}$.

10) Pour tout couple (f,g) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ on a $\Delta(f-g) = \Delta f - \Delta g$ donc, si f et g sont harmoniques, il en est de même pour $f-g$ et, d'après le principe du maximum, il existe $P \in \mathscr{C}$ tel que :

$$f(P) - g(P) = \max_{M\in\mathscr{D}} f(M) - g(M).$$

Ainsi, l'hypothèse $f_{|\mathscr{C}} = g_{|\mathscr{C}}$ nous donne :

$$\forall M \in \mathscr{D},\ f(M) - g(M) \leqslant 0.$$

4 La fonction Θ de Jacobi La formule sommatoire de Poisson

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes, on dit que la série :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$$

est absolument convergente si les *deux* séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$$

convergent ; on pose alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n + u_{-n}\right).$$

Partie A. Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction Θ définie sur $]0,+\infty[$ par la relation :

$$\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

1) *Régularité et variations*

a) Établir la convergence absolue de la série précédente.

b) Montrer que Θ est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Montrer que Θ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

d) Étudier la monotonie et la concavité de Θ.

2) *Étude asymptotique au voisinage de* $+\infty$

Pour tout entier $k > 0$ et tout nombre réel $t > 0$, on pose :

$$R_k(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

a) Prouver que :

$$0 \leqslant R_k(t) \leqslant \frac{e^{-\pi k^2 t}}{1 - e^{-2\pi k t}}.$$

b) En déduire que Θ admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

c) Établir que, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \Theta(t) - \left[1 + 2e^{-\pi t}\right] \leqslant 10^{-5}$.

3) *Calcul d'une intégrale auxiliaire*

Étant donné $t \in \left]0,+\infty\right[$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = e^{-\pi t x^2}.$$

Pour tout nombre réel u, on pose :

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

a) Établir l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$ et calculer $\widehat{f}(0)$. On rappelle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

b) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver que $\widehat{f}$ satisfait à l'équation différentielle : $y'(u) = -2\pi \dfrac{u}{t} y(u)$.

d) En déduire la valeur de $\widehat{f}(u)$.

4) *Équation fonctionnelle*

Pour tout nombre réel x, on pose : $\quad F(x) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p).$ $\quad$ (2)

a) Établir la convergence absolue de cette série et montrer que F est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est développable en série de Fourier.

c) On écrit ce développement sous la forme : $\quad F(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx}.$ $\quad$ (3)

Montrer que, pour tout entier n, $c_n = \widehat{f}(n)$. En déduire la valeur de c_n.

d) Prouver finalement que, pour tout $t > 0$: $\quad \Theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\Theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

5) *Application à l'étude de la fonction theta*

a) Déterminer la limite de $\Theta(t) - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \to 0^+$.

b) Calculer $\Theta'(1)$ en fonction de $\Theta(1)$ et déterminer des valeurs approchées de ces nombres à la précision 10^{-5}.

c) Construire la courbe représentative de la fonction Θ dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie B.
Étude d'une formule sommatoire

On se propose de généraliser les résultats obtenus au A.4) au cas où f est une fonction à valeurs réelles ou complexes, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que f, f', f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}$. (*)

On pose encore :

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x \quad (1) \qquad \text{et } F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p). \quad (2)$$

Enfin, pour toute fonction g à valeurs réelles ou complexes, continue sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$N_\infty(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \quad \text{si } g \text{ est bornée sur } \mathbb{R},$$

$$\text{et} \quad N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{si } g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

6) *Étude de la fonction $\widehat{f}$*

a) Montrer que $\widehat{f}$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$, et que $N_\infty(\widehat{f}) \leqslant N_1(f)$.

b) Exprimer $\widehat{f'}$ et $\widehat{f''}$ en fonction de $\widehat{f}$.

c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$ est absolument convergente.

7) *Étude de la fonction F*

a) Établir que, pour tout nombre réel x et tout entier $p \in \mathbb{Z}$:

$$\left| f(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_{x+p}^{x+p+1} \left|f'(s)\right|\,\mathrm{d}s.$$

En déduire que, pour tout nombre réel x, la série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$ est absolument convergente.

b) Prouver que F est 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et que :

$$N_\infty(F) \leqslant N_1(f) + N_1(f').$$

c) Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

8) *Développement de F en série de Fourier*

a) Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}. \tag{3}$$

En particulier, on a :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n). \tag{4}$$

b) Étendre la relation (3) au cas où f satisfait à l'hypothèse plus faible suivante : f est continue sur $\mathbb{R}$, ses restrictions à $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et les fonctions f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (on indiquera de façon précise comment s'étendent à ce cas plus général les résultats établis dans les questions B.2)a), B.2)b) et B.2)c)).

9) *Application*

On prend :

$$f(x) = e^{-2\pi a|x|} \text{ où } a > 0.$$

a) Expliciter la relation (3) ; en déduire, pour $x \in [0,1[$, la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2+a^2}.$$

b) Calculer enfin, pour $x \in [0,1[$, la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}.$$

Solution

Partie A. Étude d'une fonction définie par une série

$$\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}, \quad t > 0$$

1) On posera $u_n \ : \ t \mapsto e^{-\pi n^2 t}$.

a) Pour tout $t > 0$ on a, lorsque $n \to +\infty$:

$$u_n(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad u_{-n}(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui assure la convergence des séries $\sum u_n(t)$ et $\sum u_{-n}(t)$.

b) Quel que soit $a > 0$, les deux séries :

$$\sum u_n \quad \text{et} \quad \sum u_{-n}$$

convergent normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ car : $\forall t \geqslant a, 0 < u_n(t) \leqslant u_n(a)$.

Leurs sommes sont donc continues sur $]0, +\infty[$ et il en est de même pour Θ.

c) Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n^{(p)}(t) = (-1)^p \, \pi^p \, n^{2p} e^{-\pi n^2 t}.$$

Donc quel que soit $a > 0$, les deux séries :

$$\sum u_n^{(p)} \quad \text{et} \quad \sum u_{-n}^{(p)}$$

convergent normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$ car :

$$\forall t \geqslant a, 0 < \left|u_n^{(p)}(t)\right| \leqslant \left|u_n^{(p)}(a)\right| \quad \text{et} \quad u_n^{(p)}(a) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ quand } n \to +\infty \text{ ou } n \to -\infty.$$

On en déduit, par récurrence, que les deux sommes sont, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) D'après c) :

$$\Theta'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 t} < 0$$

donc Θ est strictement décroissante.

De même :

$$\Theta''(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi^2 n^4 e^{-\pi n^2 t} > 0$$

donc Θ est convexe.

2) a) $R_k(t) = e^{-\pi k^2 t} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\pi[(p+k)^2-k^2]t} \leqslant e^{-\pi k^2 t} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2\pi pkt}$ donc $0 \leqslant R_k(t) \leqslant \dfrac{e^{-\pi k^2 t}}{1-e^{-2\pi kt}}$.

b) $\Theta(t) = 1 + 2R_1(t)$ et $\lim\limits_{+\infty} R_1(t) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \Theta(t) = 1$.

c) $\Theta(t) = 1 + 2e^{-\pi t} + 2R_2(t)$ donc $0 \leqslant \Theta(t) - \left(1 + 2e^{-\pi t}\right) \leqslant \dfrac{2e^{-4\pi t}}{1-e^{-4\pi t}}$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{2u}{1-u}$ est croissante sur $]0,1[$ donc $t \mapsto \dfrac{2e^{-4\pi t}}{1-e^{-4\pi t}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant \Theta(t) - \left(1+2e^{-\pi t}\right) \leqslant \frac{2e^{-4\pi}}{1-e^{-4\pi}}.$$

Une calculatrice fournit $\dfrac{2e^{-4\pi}}{1-e^{-4\pi}} < 7 \cdot 10^{-6}$. On a donc bien :

$$\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant \Theta(t) - \left(1+2e^{-\pi t}\right) \leqslant 10^{-5}.$$

3) $t > 0$, $\quad f(x) = e^{-\pi t x^2}$, $\widehat{f}(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x$ (1)

a) Avec $g(x) = f(x)e^{-2i\pi ux}$, g est continue sur $\mathbb{R}$ et $|g(x)| = f(x)$ donc :

$$g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ quand } x \to +\infty \text{ et quand } x \to -\infty$$

ce qui assure l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$.

Le changement de variable défini par $y = x\sqrt{\pi t}$ donne :

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

b) Posons $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,x) \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$. Il est clair que :

(1) $\quad \forall u \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x)e^{-2i\pi ux}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$;

(2) $\quad \dfrac{\partial h}{\partial u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,x) \mapsto -2i\pi x f(x) e^{-2i\pi ux}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (en fait, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$) ;

(3) $\quad \forall (u,x) \in \mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial h}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant 2\pi |x| f(x)$, et la fonction $x \mapsto 2\pi |x| f(x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $x f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$).

Donc, d'après le théorème de Leibniz, $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial u}(u,x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi x e^{-\pi t x^2 - 2i\pi ux}\,\mathrm{d}x$$

c) Une intégration par parties validée par le fait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\pi t x^2}}{t} \cdot e^{-2i\pi ux} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\pi t x^2}}{t} \cdot e^{-2i\pi ux} = 0$$

F converge sur $\mathbb{R}$ et admet pour somme F. Dans ces conditions, on sait aussi que la série de Fourier de F converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c) Avec $c_n = \displaystyle\int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x$, il vient $c_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\left|f(x+p)e^{-2i\pi nx}\right| = |f(x+p)| = e^{-\pi t(x+p)^2} \leqslant e^{-\pi t(|p|-1)^2}.$$

On en déduit la convergence normale sur $[0,1]$ des deux séries de fonctions de terme généraux :

$$x \mapsto f(x+p)e^{-2i\pi nx} \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x-p)e^{-2i\pi nx}$$

et on a de ce fait :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x.$$

Le changement de variable défini par $y = x + p$ donne :

$$\int_0^1 f(x+p)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_p^{p+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y$$

donc :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_p^{p+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y \quad \text{soit} \quad c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{n^2}{t}}.$$

d) $\Theta(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = F(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ donc :

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

5) a) $\Theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + 2R_1\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ (notations du A.2)).

On a donc :

$$\Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}}R_1\left(\frac{1}{t}\right),$$

or, d'après A.2)a) :

$$0 \leqslant R_1\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant \frac{e^{-\frac{\pi}{t}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t}}}.$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi}{t}} = 0$, il vient alors :

$$\lim_{t\to 0^+} \Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} = 0.$$

b) D'après le A.4)d), on a :

$$\Theta'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\,\Theta\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\,\Theta'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Donc, pour $t = 1$:

$$\Theta'(1) = -\frac{1}{4}\,\Theta(1).$$

(c'est bien une constante). Ainsi $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et la majoration précédente donne :

$$N_\infty\left(\widehat{f}\right) \leqslant N_1(f).$$

b) Puisque f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, la formule :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

montre que f admet une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme f est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$, ces deux limites sont nulles.

En conséquence, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} = \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} = 0$$

ce qui valide l'intégration par parties :

$$\widehat{f'}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x = \left[f(x)e^{-2i\pi ux}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\,\pi\,u\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}x$$

soit :

$$\widehat{f'}(u) = 2i\,\pi\,u\widehat{f}(u).$$

En appliquant ce résultat à f' (qui est encore de classe $\mathcal{C}^1$) et de dérivée f'' intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\widehat{f''}(u) = 2i\,\pi\,u\,\widehat{f'}(u)$$

d'où finalement :

$$\widehat{f''}(u) = -4\,\pi^2\,u^2\widehat{f}(u).$$

Absolue convergence de $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)$

D'après le a), on a :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \frac{N_\infty(\widehat{f''})}{4\,\pi^2\,n^2} \leqslant \frac{N_1(f'')}{4\,\pi^2\,n^2}.$$

Cette majoration assure l'absolue convergence des deux séries :

$$\sum_{n\geqslant 0}\widehat{f}(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0}\widehat{f}(-n).$$

7) a) C'est une question de cours !

Intégrons par parties :

$$\int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,\mathrm{d}s = \Big[-(x+p+1-s)f(s)\Big]_{x+p}^{x+p+1} + \int_{x+p}^{x+p+1}(x+p+1-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

donc :

$$f(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{x+p}^{x+p+1}(x+p+1-s)f'(s)\,\mathrm{d}s$$

et l'inégalité annoncée en résulte.

Absolue convergence de $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$

La majoration précédente donne :

$$\forall n\geqslant 1,\ \sum_{p=1}^{n}|f(x+p)| \leqslant \sum_{p=1}^{n}\int_{x+p}^{x+p+1}|f(s)|\,\mathrm{d}s + \sum_{p=1}^{n}\int_{x+p}^{x+p+1}\left|f'(s)\right|\mathrm{d}s$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{p=1}^{n} |f(x+p)| \leqslant \int_{x+1}^{x+n+1} |f| + \int_{x+1}^{x+n+1} |f'|$$

et, puisque f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$\sum_{p=1}^{n} |f(x+p)| \leqslant \int_{x+1}^{+\infty} |f| + \int_{x+1}^{+\infty} |f'|$$

Ainsi la série :

$$\sum_{p\geqslant 1} |f(x+p)|,$$

qui est à termes réels positifs, a la suite de ses sommes partielles majorée, ce qui prouve qu'elle converge. On montre de même que :

$$\sum_{p\geqslant 1} |f(x-p)|$$

est convergente, d'où finalement l'absolue convergence de :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(x+p).$$

b) *F est 1-périodique.* Même démonstration qu'en A.4)a).

$N_\infty(F) \leqslant N_1(f) + N_1(f')$. D'après le a), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=-n}^{n} |f(x+p)| \leqslant \int_{x-n}^{x+n+1} |f| + |f'| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f| + |f'|$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leqslant N_1(f) + N_1(f')$$

et enfin :

$$N_\infty(F) \leqslant N_1(f) + N_1(f').$$

F est continue. Dans le but de prouver la convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$, considérons les restes

$$R_n \ : \ x \mapsto \sum_{p=n}^{+\infty} f(x+p) \ \text{ et } \ R'_n \ : \ x \mapsto \sum_{p=n}^{+\infty} f(x-p).$$

Toujours avec l'inégalité du a), on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} |f(x+p)| \leqslant \int_{x+n}^{+\infty} |f| + |f'| \quad \text{et} \quad |R'_n(x)| \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} |f(x-p)| \leqslant \int_{-\infty}^{x-n+1} |f| + |f'|$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a donc :

$$|R_n(x)| \leqslant \int_{n}^{+\infty} |f| + |f'| \quad \text{et} \quad |R'_n(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{2-n} |f| + |f'|.$$

Donc :

$$\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \int_{n}^{+\infty} |f| + |f'| \quad \text{et} \quad \|R'_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \int_{-\infty}^{2-n} |f| + |f'|.$$

Sachant que ces deux intégrales tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a ainsi prouvé la convergence uniforme sur $[0, 1]$ des deux séries :

$$\sum_{p\geqslant 0} f(x+p) \text{ et } \sum_{p\geqslant 0} f(x-p).$$

La continuité de F sur $[0, 1]$ en résulte, et puisqu'elle est 1-périodique, F est finalement continue sur $\mathbb{R}$.

c) Le résultat du a) s'applique à f' qui est encore de classe $\mathcal{C}^1$:

$$|f'(x+p)| \leqslant \int_{x+p}^{x+p+1} |f'| + |f''|$$

et puisque f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on obtient comme en b) que les séries :

$$\sum_{p \geqslant 0} f'(x+p) \quad \text{et} \quad \sum_{p \geqslant 0} f'(x-p)$$

convergent uniformément sur le segment $[0, 1]$.

Il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et donc sur $\mathbb{R}$ du fait de la 1-périodicité de :

$$x \mapsto \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f'(x+p),$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f'(x+p).$$

8) a) Puisque F est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

avec :

$$c_n = \int_0^1 F(x) e^{-2i\pi nx} \, \mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad c_n = \int_0^1 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p) e^{-2i\pi nx} \, \mathrm{d}x$$

Les séries :

$$\sum_{p \geqslant 0} f(x+p) \quad \text{et} \quad \sum_{p \geqslant 0} f(x-p)$$

étant uniformément convergentes sur le segment $[0, 1]$ et, puisque :

$$\left| \sum_{p=n}^{+\infty} f(x+\varepsilon p) e^{-2i\pi nx} \right| = \left| \sum_{p=n}^{+\infty} f(x+\varepsilon p) \right| \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

il en est encore de même pour les deux séries :

$$\sum_{p \geqslant n} f(x+\varepsilon p) e^{-2i\pi nx}.$$

On peut alors reprendre le calcul de c_n :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+p) e^{-2i\pi nx} \, \mathrm{d}x$$

et on termine comme en A.4)c) :

$$c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_p^{p+1} f(y) e^{-2i\pi ny} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi ny} \, \mathrm{d}y = \widehat{f}(n)$$

Ainsi le développement en série de Fourier de F donne la formule annoncée.

b) ▪ f' et f'' sont maintenant continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et admettent en 0 des limites à droite et à gauche.

▪ Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, l'intégration par parties qui fournit l'inégalité du B.2)a) reste valide ainsi que cette inégalité. On a donc toujours l'absolue convergence de :

5 Transformée de Laplace

Ce problème propose d'établir les principales propriétés d'un opérateur appelé transformateur de Laplace et noté $\mathcal{L}$ puis de calculer son action sur certaines fonctions.

On définit pour cela un ensemble E formé des fonctions f appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et telles que, pour tout réel α strictement positif, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout élément f de E et tout réel x strictement positif, on pose alors :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Partie A. Propriétés de la transformée de Laplace d'un élément de E

1) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)$ est élément de E.

2) a) Montrer que toute fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ est élément de E.

b) Montrer que toute fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ est élément de E.

c) Montrer que les primitives d'une telle fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ sont aussi éléments de E.

3) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4) Montrer que, pour tout élément f de E et pour tout entier naturel n, la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto t^n f(t)$ est aussi élément de E.

5) Montrer que, pour tout élément f de E, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Montrer que, pour tout élément f de E, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(\mathcal{L}(f)\right)^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

7) Montrer que, pour tout élément f de E, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

8) On considère, dans cette question, une fonction h continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que h et sa dérivée h' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que $h(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(h)(x) = h(0)$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\mathcal{L}(h)(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} h(t)$.

9) Montrer de même que, si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telles que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}_+$, on a encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x).$$

Partie B. Détermination de la transformée de Laplace de certaines fonctions

10) Montrer que les fonctions $f\ :\ t \mapsto \sin t$, $g\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ et $h\ :\ t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ sont éléments de E et déterminer leurs transformées de Laplace.

11) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, périodique de période T ($T > 0$) et telle que $f(0) = 0$. Soit g la fonction, nulle sur l'intervalle $\left[T, +\infty\right[$, et définie sur $\left[0, T\right]$ par :

$$\forall t \in \left[0, T\right],\ g(t) = f(t).$$

Montrer que ces deux fonctions appartiennent à l'ensemble E et démontrer la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\mathcal{L}(g)(x)}{1 - e^{-xT}}.$$

12) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f\ :\ t \mapsto |\sin(\pi t)|$.

Soit une série entière :

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n,$$

de rayon de convergence R, $R > 0$ (si le rayon est infini, on posera $\dfrac{1}{R} = 0$).

13) Montrer que, pour tout réel c strictement supérieur à $\dfrac{1}{R}$, il existe M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant M \cdot c^n.$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

14) Montrer que, pour tout réel $c > \dfrac{1}{R}$, la fonction :

$$t \mapsto e^{-ct} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{c^{n+1}}.$$

15) Montrer que la fonction :

$$J\ :\ x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right)\mathrm{d}t$$

est élément de E.

Partie A

1) On suppose $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\varphi\ :\ t \mapsto P(t)e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $P(t) = \mathcal{O}(t^n)$ $(n = \deg P)$ donc, avec $\alpha > 0$, il vient :

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \varphi(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La règle de Riemann donne donc l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+$ et a fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) a) Il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(t)| \leqslant M$ et pour $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, $\varphi\ :\ t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |\varphi(t)| \leqslant Me^{-\alpha t}$$

donc le critère de domination donne son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Encore le critère de domination avec $\left|f(t)e^{-\alpha t}\right| \leqslant |f(t)|$.

c) Une primitive de f s'écrit :

$$F\ :\ t \mapsto \lambda + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet des limites réelles en $+\infty$ et en 0, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et le a) donne $F \in E$.

3) Il est clair que E est non vide car $0 \in E$.

Pour $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, sachant que l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel, on obtient que :

$$t \mapsto \left(\lambda f(t) + g(t)\right)e^{-\alpha t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\lambda f + g \in E$. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

4) Pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 < t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t} \leqslant M.$$

Puisque f appartient à E, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc en écrivant :

$$\left|t^n f(t)e^{-\alpha t}\right| = \left|t^n e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right|\left|f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right| \leqslant M\left|f(t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\right|$$

le critère de domination donne l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto t^n f(t)e^{-\alpha t}$.

5) La fonction $\Phi \,:\, (x,t) \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, \left|f(t)e^{-xt}\right| \leqslant |f(t)|\, e^{-at}$$

et par définition de E, $t \mapsto |f(t)|\, e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc le théorème de continuité sous le signe $\int$, avec hypothèse de domination locale, donne que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} \,:\, (x,t) \mapsto (-t)^n f(t)e^{-xt}$$

donc, d'après 4), quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions :

$$t \mapsto \Phi(x,t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x,t),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

En remarquant, de plus, que pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, +\infty[, \left|\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant t^n\, |f(t)|\, e^{-at},$$

avec $t \mapsto t^n |f(t)|\, e^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de dérivation sous le signe $\int$, avec hypothèse de domination locale, donne que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

7) Considérons la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_n(t) = |f(t)|\, e^{-nt}$$

- les φ_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$,
- la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle,
- d'autre part, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\varphi_n(t)| \leqslant \varphi_1(t)$,
- donc, puisque φ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = 0.$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, en posant $n_x = E(x)$, on a $n_x \geqslant 1$ et :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_{n_x}.$$

Or ce qui précède donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n_x} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = 0$.

8) a) Pour tout $a > 0$, on a $h(x) = h(a) + \displaystyle\int_a^x h'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors l'intégrabilité de h' sur $[a, +\infty[$ assure l'existence de :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ (limites réelles bien entendu).

Remarquons que h étant continue en 0 et h' intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, en faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) L'existence de $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ donne $\lim_{t\to+\infty} h(t)e^{-xt} = 0$ et avec une intégration par parties, il vient :

$$\mathcal{L}(h')(x) = \int_0^{+\infty} h'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[h(t)e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} h(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x).$$

c) ▪ D'après 7) on a $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(h')(x) = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(h)(x) = h(0)$.

▪ La fonction $(x,t) \mapsto h'(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|h'(t)e^{-xt}\right| \leqslant \left|h'(t)\right|.$$

Sachant que h' est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de continuité sous le signe somme, avec hypothèse de domination globale, donne que :

$$\mathcal{L}(h')\ :\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} h'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

On a donc, d'après le b) :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\mathcal{L}(h)(x) = h(0) + \mathcal{L}(h')(0) = h(0) + \int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire , d'après a) :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\mathcal{L}(h)(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(h(0) + \int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{x\to+\infty} h(x).$$

9) D'après 2)a), h et h' appartiennent à E et de plus on a encore :

$$\lim_{t\to+\infty} h(t)e^{-xt} = 0.$$

Donc l'intégration par parties reste valide et donne :

$$\mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x) \quad \text{comme en 8)b).}$$

Partie B

10) a) $f\ :\ t \mapsto \sin t$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc est élément de E d'après 2)a).

$$\mathcal{L}(f)(x) = \operatorname{Im}\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{+\infty} = \operatorname{Im}\frac{1}{x-i} = \frac{1}{x^2+1}.$$

b) De même g est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est élément de E.

D'après 6) on a :

$$\mathcal{L}(g)'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2+1} \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}(g)(x) = k - \operatorname{Arctan} x.$$

Alors $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(g)(x) = 0$ fournit $k = \frac{\pi}{2}$, d'où enfin :

$$\mathcal{L}(g)(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.$$

(On rappelle que $x \in \mathbb{R}_+^*$.)

c) D'après 2)c), puisque g est un élément de E, il en est de même pour h.

Il est classique que $h(t)$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$.

Pour cela, on peut écrire :

$$h(t) = \left[\frac{1-\cos u}{u}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1-\cos t}{t} + \int_0^t \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

puis on observe que :

$$\Psi \;:\; u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 et telle que $0 \leqslant \Psi(u) \leqslant \dfrac{2}{u^2}$) pour en conclure que :

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1-\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Dans ces conditions, la formule du 8)b) donne avec $h' = g$ et $h(0) = 0$:

$$\mathcal{L}(g)(x) = x\mathcal{L}(h)(x) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(h)(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}.$$

11) $f(0) = 0$ donne $f(T) = 0$ donc $g(0) = g(T) = 0$ et g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi affaire à deux fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ donc éléments de E d'après 2)a).

Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(u+kT)e^{-x(u+kT)}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT} \int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u \\
\mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-xkT}
\end{aligned}$$

> C'est une simple factorisation et non pas une permutation $\sum \leftrightarrow \int$.

d'où :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\displaystyle\int_0^T g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u}{1-e^{-xT}}$$

(on a reconnu une série géométrique), soit encore :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\mathcal{L}(g)(x)}{1-e^{-xT}}.$$

12) Soit $f \;:\; t \mapsto |\sin \pi t|$.

f vérifie les hypothèses du 11) avec $T = 1$ donc :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \frac{\mathcal{L}(g)(x)}{1-e^{-x}} \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(g)(x) = \int_0^1 e^{-xt}\sin \pi t\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable défini par $x = ct$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-ct}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c^{n+1}}\,\Gamma(n+1) = \frac{n!}{c^{n+1}} \quad \text{donc} \quad v_n = \frac{|a_n|}{c^{n+1}}\,.$$

Puisque $\frac{1}{c} < R$, la série de terme général :

$$v_n = \int_0^{+\infty} |u_n| \text{ est convergente.} \tag{iii}$$

Alors, avec $(i), (ii), (iii)$, le théorème de convergence dominée pour les séries donne que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ce que l'on a déjà prouvé) mais aussi que :

$$\int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-ct}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{c^{n+1}}$$

15) Puisque $(x, t) \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'après le théorème de continuité sous le signe $\int$ (intégration sur un segment) donne que :

$$J \ : \ x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+\,.$$

D'autre part, il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}_+\,, |J(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ et J est élément de E d'après 2)a).

Le développement en série entière de cos donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\,, \forall t \in \mathbb{R}, \cos\left(\sqrt{x}\cos t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n \cos^{2n} t}{(2n)!}\,.$$

La série de fonction de terme général :

$$u_n \ : \ t \mapsto (-1)^n \frac{x^n \cos^{2n} t}{(2n)!}$$

converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $|u_n(t)| \leqslant \frac{x^n}{(2n)!}$ (terme général d'une série convergente quel que soit x fixé dans $\mathbb{R}_+$). Elle est donc uniformément convergente sur ce segment et on obtient :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{\cos^{2n} t}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

soit, d'après le résultat donné en rappel concernant l'intégrale de Wallis :

$$J(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n}(n!)^2}\,.$$

Ce calcul étant valable quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$, le rayon de convergence est $R = +\infty$ (ce qui peut aussi se vérifier directement).

En posant :

$$a_n = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!}\,,$$

le résultat précédent s'écrit :

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

On vérifie facilement (par exemple avec d'Alembert) que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est aussi $R = +\infty$ donc le 14) donne :

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} e^{-xt} J(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} x^{n+1} n!}$$

c'est-à-dire :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(J)(x) = \frac{\pi}{2x} e^{-\frac{1}{4x}}.$$

16) $\Gamma \ : \ x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

a) Soit $\varphi_n \ : \ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leqslant n \\ \varphi_n(t) = 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi_n.$$

(x est fixé quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$.)

$(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $\varphi \ : \ t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$.

De $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |\varphi_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

et, puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \varphi = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \varphi_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On pose $t = nu$, il vient :

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, \mathrm{d}u$$

puis, par intégrations par parties successives ou par intégration par parties généralisée :

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, \mathrm{d}u = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

d'où finalement :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}. \tag{i}$$

Hidden page

En dérivant, on en conclut :

$$\Phi'(x) - \Phi'(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

21) D'après 19), $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(g)(x+k) - \mathcal{L}(g)(x+k+1) = \dfrac{1}{(x+k+1)^2}$, donc :

$$\mathcal{L}(g)(x) - \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(g)(x+n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{L}(g)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

Avec :

$$\Phi(x-1) = -\gamma - \frac{1}{x} + x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)},$$

la convergence normale (donc uniforme) sur $\mathbb{R}_+$ de la série dérivée $\sum \dfrac{-1}{k(k+x)^2}$ donne que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Phi'(x-1) &= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} - x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)^2}\\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[, \Phi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

On en conclut :

$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[, \mathcal{L}(g)(x) = \Phi'(x) = \frac{\Gamma''(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'^2(x+1)}{\Gamma^2(x+1)}.$$

6 La fonction dzeta de Riemann

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ, qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour s réel de l'intervalle $]0,1[$, l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s) \quad \text{avec} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

On pose, dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad , \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \quad , \quad K_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

Partie A. Définition et propriétés de ζ

I. Définition de ζ

Soit $s > 0$, n un entier naturel non nul. Posons : $u_n(s) = \dfrac{1}{n^s} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t^s}$.

1) Montrer que $0 \leqslant u_n(s) \leqslant \dfrac{s}{n^{s+1}}$.

2) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

3) Prouver que, pour $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$ que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

4) Prouver que la suite de terme général : $H_N(1) - \ell n\, N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

II. Autre expression de ζ

1) Soit s un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0, +\infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui sera notée f dans la suite.

2) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s).$$

3) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s, la suite de terme général :

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite que l'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

III. Calcul approché des valeurs de ζ

Dans cette question on négligera les erreurs d'arrondi.

1) Donner un algorithme de calcul approché de $f(s)$ à une précision ε fournie. L'appliquer au calcul de $\zeta(1/2)$ à 10^{-1} près.

2) Proposer un algorithme de calcul de $S_{2^p}(s)$ fondé sur la relation suivante, dont la vérification n'est pas demandée :

$$H_{4N}(s) = \left(1 + 2^{-s}\right) H_{2N}(s) - 2^{-s} H_N(s) + \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

V. Soit $s > 0$ et $x > -1$; prouver l'intégrabilité, sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t + x}$.

On désignera, dans la suite, par $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale correspondante pour $x = 0$ (cf. préambule).

VI. Dans cette question, x est un réel tel que $|x| < 1$ et s est un réel strictement positif.

1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}.$$

2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(s) f(s).$$

VII. Dans cette question, x et s sont des réels de l'intervalle $]0, 1[$. On fixe s et on définit une suite (v_n) de fonctions définies sur l'intervalle $]0, 1]$ par :

$$\begin{cases} v_0(t) = t^{x-1} \\ v_n(t) = (-1)^n t^{n-1}\left[t^x - t^{-x}\right] \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 v_n(t)\,\mathrm{d}t$. Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

2) Soit a un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$I(a, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad J(a, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) \mathrm{d}t.$$

Partie C.
Équation fonctionnelle de la fonction ζ

I. Où l'on obtient (E)

Dans cette question, s vérifie toujours $0 < s < 1$. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\phi_N(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2\pi^2}$$

3) Établir les inégalités :

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N-1)\pi}{x}\right) \leqslant \phi_N(x) \leqslant \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N+1)\pi}{x}\right)$$

4) En déduire l'encadrement :

$$\frac{(2N-1)^s}{2s} - K_N(1-s) \leqslant \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) f(s) \leqslant \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s)$$

puis l'équation fonctionnelle (E).

3) On a :

$$\begin{aligned} H_N(s) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} u_n(s) + \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \\ &= U_n(s) + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s} + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \quad \text{où on a posé} \quad U_n(s) = \sum_{n=1}^{N} u_n(s) \\ &= U_n(s) + \frac{1}{1-s}\left(N^{1-s} - 1\right) + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \end{aligned}$$

donc :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1} + U_n(s) + \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Avec $0 \leqslant \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{N^s}$, on obtient $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = 0$, donc :

$$\lim_{N\to+\infty} H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1} + U(s).$$

On pose $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + U(s)$. (2)

4) Comme en 3) :

$$H_N(1) = U_N(1) + \ln N + \ln \frac{N+1}{N}.$$

En conséquence, $\lim\limits_{N\to+\infty} H_N(1) - \ln N = U(1)$.

Remarque. On vient de retrouver la constante d'Euler.

II. Autre expression de ζ

1) Posons :

$$v_n \;:\; s \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Pour tout $s > 0$ la série $\sum v_n(s)$ converge d'après le critère des séries alternées, la fonction f est donc définie sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$, v_n est de classe $\mathcal{C}^1$avec :

$$v_n'(s) = (-1)^n \ln n e^{-s \ln n}.$$

On en déduit comme en I.2) que la série $\sum v_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle compact $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \; f'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^s}.$$

Remarque. En fait $\sum v_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

2) $\forall N \geqslant 1$, $S_{2N}(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^s} = H_{2N}(s) - \frac{1}{2^{s-1}} H_N(s)$.

D'après I.3), on a $H_N(s) = \dfrac{N^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + o(1)$ donc aussi $H_{2N}(s) = \dfrac{(2N)^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + o(1)$.

On en déduit $S_{2N}(s) = \zeta(s)\left(1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}\right) + o(1)$ d'où $f(s) = \zeta(s)\left(1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}\right)$.

3) $S_{2N}(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n+1)^s} = -\frac{1}{2^s} H_N(s) + K_N(s).$

Donc :

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)} = S_{2N}(s) + \frac{1}{2^s}\left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}\right)$$

et :

$$\lim_{N\to+\infty} K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)} = f(s) + \frac{1}{2^s}\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

III. Calcul approché des valeurs de ζ

1) D'après le théorème des séries alternées :

$$|f(s) - S_N(s)| \leqslant \frac{1}{(N+1)^s}.$$

D'après II.2) :

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) = -(\sqrt{2}+1) f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Avec $1+\sqrt{2} < 2,5$, pour obtenir $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ à la précision 10^{-1}, il suffit de calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ à la précision $4 \cdot 10^{-2}$.

On détermine donc N tel que $\frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 4 \cdot 10^{-2}$: il vient $N+1 \geqslant 25^2$ donc $N \geqslant 624$.

Avec Maple on obtient alors :

$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1,4$: evalf(sum((-1)**n/sqrt(n),n=1..624)*(1+sqrt(2)));

Remarque. À $5\cdot 10^{-4}$ on a $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1,460$ (valeur fournie par Maple qui connaît la fonction ζ).

2) On obtient :

$$S_{2^p} = H_{2^p} - \frac{1}{2^{s-1}} H_{2^{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) H_{2p-1} - \frac{1}{2^s} H_{2^{p-2}} + \sum_{n=2^{p-2}}^{2^{p-1}-1} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

En se contentant d'une approximation de la somme :

$$\Sigma_p = \sum_{n=2^{p-2}}^{2^{p-1}-1} \frac{1}{(2n+1)^s},$$

on obtient une valeur approchée de S_{2^p} à partir des $\frac{1}{n^s}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 2^{p-1}$ c'est-à-dire avec deux fois moins de termes que dans :

$$S_{2^p} = \sum_{n=1}^{2^p} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

L'approximation de Σ_p peut être réalisée au moyen d'intégrales :

$$\int_{2^{p-2}}^{2^{p-1}} \frac{dt}{(2t+1)^s} \leqslant \Sigma_p \leqslant \int_{2^{p-2}-1}^{2^{p-1}-1} \frac{dt}{(2t+1)^s}$$

2) D'après II.1), on a :

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ell n\, n}{n}.$$

Remarquons que du V.1), avec :

$$1 - \frac{1}{2^{s-1}} = 1 - e^{-(s-1)\ell n 2} \sim (s-1)\,\ell n\, 2,$$

on déduit que lorsque s tend vers 1 :

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) \sim (s-1)\,\ell n\, 2 \times \frac{1}{s-1} \text{ et donc } f(1) = \ell n\, 2$$

(ce qui est par ailleurs un résultat bien connu).
En développant à l'ordre 2, on a :

$$1 - \frac{1}{2^{s-1}} = (s-1)\,\ell n\, 2 - \frac{(s-1)^2}{2}\,\ell n^2\, 2 + o\big((s-1)^2\big)$$

donc :

$$\begin{aligned} f(s) &= \left[\ell n\, 2 - \frac{s-1}{2}\,\ell n^2\, 2 + o(s-1)\right]\big[1 + \gamma(s-1) + o(s-1)\big] \\ &= \ell n\, 2 + (s-1)\left(\gamma - \frac{\ell n\, 2}{2}\right)\ell n\, 2 + o(s-1) \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$f'(1) = \lim_{s \to 1} \frac{f(s) - f(1)}{s-1} = \left(\gamma - \frac{\ell n\, 2}{2}\right)\ell n\, 2.$$

En comparant les deux valeurs trouvées pour $f'(1)$, on a la formule annoncée.

Partie B

I. Coefficients de Fourier de ψ

ψ est paire donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n(\psi) = 0$ et on trouve $a_n(\psi) = a_n$.

ψ est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théoérème de Dirichlet elle est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \psi(x)$$

et pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{\phi(x) + \phi(-x)}{2}.$$

II. Σa_n est absolument convergente

ψ étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on est en effet dans les conditions du théorème de convergence normale.

III. Calcul de $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$

En appliquant la formule du I. en 0, il vient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \phi(0) \tag{5}$$

et en l'appliquant en π :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n=\frac{\phi(\pi)+\phi(-\pi)}{2}.$$

En retranchant ces deux égalités, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}=\frac{\phi(0)}{2}-\frac{\phi(\pi)+\phi(-\pi)}{4} \tag{6}$$

IV.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2} \tag{7}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2} \tag{8}$$

Avec $\phi\ :\ t\mapsto e^{\lambda t}$, si $\lambda\notin i\mathbb{Z}$, il vient :

$$a_n=\frac{(-1)^n\lambda}{\pi\left(\lambda^2+n^2\right)}\left(e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}\right)$$

et la formule (5) se lit :

$$1=\left(e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}\right)\left[\frac{1}{2\lambda\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda}{\pi\left(\lambda^2+n^2\right)}\right]$$

d'où la formule (7) avec $\lambda=ix$ (et $\lambda\notin i\mathbb{Z}$ correspond à $x\notin\mathbb{Z}$).

En appliquant la formule (6), il vient :

$$\frac{\left(e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}\right)}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\lambda}{\lambda^2+(2n+1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{e^{\lambda\pi}+e^{-\lambda\pi}}{4}$$

donc avec $x=\lambda\pi$ (ie $\lambda=\frac{x}{\pi}$) on a pour tout x réel $\lambda\notin i\mathbb{Z}^*$, les a_{2n+1} sont bien définis comme ci-dessus, et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2}=-\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)}=-\frac{e^{x-1}}{2\left(e^x+1\right)}$$

(on remarque que $2-e^x-e^{-x}=-(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2$) et enfin :

$$\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2}=\frac{1}{e^x+1} \tag{8}$$

V. $s>0$, $x>-1$. Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t\mapsto\dfrac{t^{s-1}}{e^t+x}$

La fonction $h_{s,x}\ :\ t\mapsto\dfrac{t^{s-1}}{e^t+x}$ est continue, positive sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 :

$$h_{s,x}(t)\sim\frac{t^{s-1}}{1+x}$$

donc $h_{s,x}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-s<1$ c'est-à-dire $s>0$ ce qui est vrai par hypothèse.

Au voisinage de $+\infty$, $h_{s,x}(t)=o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ donc $h_{s,x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Avec $\frac{s+1}{2} \in]0,1[$ on peut appliquer la formule (11) et il vient :

$$I(a,s) = \frac{\pi a^{s-1}}{2\sin\left(\pi\frac{s+1}{2}\right)} = \frac{\pi a^{s-1}}{2\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$$

Remarque. L'application :

$$t \mapsto \frac{t^2}{a^2}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ sur lui-même. Dans ces conditions, l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de :

$$u \mapsto \frac{u^{\frac{s+1}{2}-1}}{1+u}$$

donne celle de :

$$t \mapsto \frac{t^s}{a^2+t^2}$$

ce qui dispense d'une vérification par ailleurs sans difficulté.

- Pour $J(a,s)$, on commence par prouver que $i\ :\ t \mapsto t^{s-1}\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$:

• i est continue positive sur $]0,+\infty[$;

• lorsque $t \to 0$, $i(t) \sim \frac{\pi}{2}t^{s-1}$ et $s-1 > -1$;

• lorsque $t \to +\infty$, $i(t) \sim \frac{a}{t^{2-s}}$ et $2-s > 1$.

Remarquons alors que :

$$\lim_{t\to 0} t^s \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} t^s \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) = 0$$

(car $\operatorname{Arctan}\frac{a}{t} \sim \frac{a}{t}$ et $s<1$), l'intégration par partie est donc valide et il vient :

$$J(a,s) = \left[\frac{1}{s}t^s \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{soit} \quad J(a,s) = \frac{a}{s}I(a,s) = \frac{\pi a^s}{2s\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$$

Partie C

I.

1) D'après la formule (8) du B.IV. on a :

$$\phi_N(s) = \frac{1}{2} - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2}$$

La décroissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{2x}{x^2+(2t+1)^2\pi^2}$ donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_n^{n+1} \frac{2x}{x^2+(2k+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{2x}{x^2+(2t+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\int_N^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(2t+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(2n+1)^2\pi^2} \leqslant \int_{N-1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(2t+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\frac{(2t+1)\pi}{x}\right]_{t=N}^{+\infty} \leqslant \frac{1}{2} - \Phi_N(s) \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\frac{(2t+1)\pi}{x}\right]_{t=N-1}^{+\infty}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{x}\right) \leqslant \frac{1}{2} - \Phi_N(s) \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathit{Arctan}\frac{(2N-1)\pi}{x}\right)$$

d'où la double inégalité annoncée.

2) L'inégalité précédente donne successivement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}t^{s-1}\operatorname{Arctan}\frac{(2N-1)\pi}{t} &\leqslant \frac{t^{s-1}}{e^t+1} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{2t^s}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}t^{s-1}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{t}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{N-1}\int_0^{+\infty}\frac{2t^s}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où compte tenu des questions B.VI.2) et B.VII.2) :

$$\frac{(2N-1)^s\pi^s}{2s\cos\dfrac{\pi s}{2}} \leqslant \Gamma(s)f(s) + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\pi^s(2n+1)^{s-1}}{\cos\dfrac{\pi s}{2}} \leqslant \frac{(2N+1)^s\pi^s}{2s\cos\dfrac{\pi s}{2}}$$

et l'encadrement souhaité en résulte.

Équation fonctionnelle. Avec la formule (3) du A.II.2), l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned}\frac{(2N-1)^s}{s2^s} - 2^{1-s}K_N(1-s) &\leqslant 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)\\ &\leqslant \frac{(2N+1)^s}{s2^s} - 2^{1-s}K_N(1-s)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}&\frac{(2N-1)^s}{s2^s} - 2^{1-s}K_N(1-s) - \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)\\ &\qquad\leqslant \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left[2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s) - \zeta(s)\right]\\ &\qquad\leqslant \frac{(2N+1)^s}{s2^s} - 2^{1-s}K_N(1-s) - \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).\end{aligned}$$

D'après A.II.3), pour $s \in [0,1[$ on a $1-s>0$ et donc :

$$\lim_{N\to+\infty} K_N(1-s) - \frac{N^{-s}}{s2^{1-s}} = \left(1-\frac{1}{2^{1-s}}\right)\zeta(s)$$

c'est-à-dire :

$$2^{1-s}K_N(1-s) = \frac{N^s}{s} + \left(2^{1-s}-1\right)\zeta(s) + o(1).$$

Avec $(2N-1)^s = (2N)^s\left(1-\frac{s}{2N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right) = (2N)^s + o(1)$ (car $s<1$), il vient :

$$\frac{(2N-1)^s}{s2^s} = \frac{N^s}{s} + o(1) \quad \text{donc} \quad 2^{1-s}K_N(1-s) = \frac{(2N-1)^s}{s2^s} - \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) + o(1)$$

On a ainsi prouvé que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(2N-1)^s}{s2^s} - 2^{1-s}K_N(1-s) - \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = 0.$$

On a de même :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{(2N+1)^{-s}}{s2^{-s}} - 2^{1-s}K_N(1-s) - \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = 0.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, l'encadrement précédent conduit donc à l'équation (E).

II. Étude de ζ au voisinage de 0

1) La fonction $\varphi\ :\ (s,t)\mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto t^{s-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}\ :\ (s,t)\mapsto t^{s-1}\,\ell n\, t e^{-t},$$

donc pour tout $s\in[a,b]$ avec a,b réels tels que $0<a<b$, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

où ψ est définie par $\psi(t) = t^{a-1}\,|\ell n\, t|$ si $0<t\leqslant 1$ et $\psi(t)=t^{b-1}\,\ell n\, t e^{-t}$ si $t\geqslant 1$.

Cette fonction ψ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, il en résulte que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\ell n\, t\,\mathrm{d}t.$$

Considérons la suite de fonctions (f_n) telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{cases} f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ell n\, t & \text{si } 0<t\leqslant n \\ f_n(t) = 0 & \text{si } t\geqslant n \end{cases}$$

Les f_n sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$.

La suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $F\ :\ t\mapsto e^{-t}\,\ell n\, t$ qui est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par inégalité de convexité, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in]0,+\infty[$, $0<f_n(t)\leqslant e^{-t}\,\ell n\, t$ donc le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} f_n = \int_{]0,+\infty[}\lim f_n$$

c'est-à-dire $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t=\Gamma'(1).$$

2) En posant $u=\frac{t}{n}$, il vient :

$$I_n=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t=\frac{n}{n+1}\ln n+n\int_0^1(1-u)^n\ln u\,\mathrm{d}u.$$

Posons :

$$J_n=n\int_0^1(1-u)^n\ln u\,\mathrm{d}u=n\int_0^1 x^n\ln(1-x)\,\mathrm{d}x,$$

on a aussi :

$$J_n=-\int_{[0,1[}\sum_{p=1}^{+\infty}n\frac{x^{n+p}}{p}\,\mathrm{d}x$$

(en utilisant le développement en série entière de $x\mapsto\ln(1-x)$).

La série de terme général :

$$\int_0^1\left|n\frac{x^{n+p}}{p}\right|\mathrm{d}x=\frac{n}{p(p+n+1)}$$

étant convergente, le théorème de convergence dominée pour les séries donne :

$$J_n=-\sum_{p=1}^{+\infty}\int_{[0,1[}n\frac{x^{n+p}}{p}\,\mathrm{d}x=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{n}{p(p+n+1)}$$

En écrivant :

$$\frac{n}{p(p+n+1)}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+n+1}\right),$$

la somme de cette série s'obtient par téléscopage :

$$J_n=-\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Finalement :

$$I_n=\frac{n}{n+1}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)\quad\text{et}\quad\Gamma'(1)=\lim_{n\to+\infty}I_n=-\gamma.$$

3) D'après le 2) lorsque s tend vers 1 :

$$\Gamma(s)=1+(1-s)\,\gamma+o(1-s)$$

(c'est la formule de Taylor : $\Gamma(s)=\Gamma(1)+(s-1)\,\Gamma'(1)+o(s-1)$).

D'autre part, d'après A.5.1) : $\zeta(s)=\dfrac{1}{s-1}+\gamma+o(1)$.

L'équation fonctionnelle (E) donne pour $s\in\,]0,1[$

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right)\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

3) Prouver que S est continue sur $\left]0, +\infty\right[$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. On pose :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(t).$$

a) Établir que :

$$R_n(t) = r_n \, \varphi\left((n+1)t\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k \Big(\varphi\left((k+1)t\right) - \varphi(kt) \Big).$$

b) En déduire que :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_0^{+\infty} \left|\varphi'(t)\right| \mathrm{d}t \right).$$

c) Prouver que S est continue sur $\left[0, +\infty\right[$.

Partie B.
Pseudo-dérivée seconde

On note E_0 l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_2 f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

lorsque cette limite existe. On dit alors que $D_2 f(x)$ est la pseudo-dérivée seconde de f en x.
On note E_2 l'ensemble des applications $f \in E_0$ ayant une pseudo-dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$. Pour $f \in E_2$, on note $D_2 f$ l'application $x \mapsto D_2 f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5) Vérifier succinctement que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0 et que l'application $f \mapsto D_2 f$ de E_2 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est linéaire.

6) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in E_2$ et que $D_2 f = f''$.

7) Soit $f \in E_2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet un maximum local en x_0. Étudier le signe de $D_2 f(x_0)$.

8) Soit $f \in E_2$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, D_2 f(x) > 0$.

a) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Notons h l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$h(a) = f(a) \quad \text{et} \quad h(b) = f(b).$$

$f - h$ possède-t-elle un maximum local ? Étudier le signe de $(f-h)(x)$ lorsque $x \in \left]a, b\right[$.

b) En déduire que f est convexe.

9) Soit $f \in E_2$.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, D_2 f(x) \geqslant 0$.

Indication. On pourra poser $f_n(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{n}$.

b) Montrer que $D_2 f = 0$ si et seulement si f est affine.

c) On suppose que $D_2 f$ est continue. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f'' = D_2 f$.

Hidden page

16) On suppose dans cette question que f est continue.

Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de G''. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

17) On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = 0.$$

Montrer que les a_n et b_n sont tous nuls.

Une fonction 2π-périodique peut-elle être la somme (au sens de la convergence simple) de deux séries trigonométriques distinctes ?

Solution

Partie A. Continuité de la somme d'une série de fonctions

1) Il est acquis que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et continue en 0. On sait donc que pour prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0,+\infty[$, il suffit de s'assurer que φ' admet une limite réelle en 0.

Formons :

$$\varphi'(t) = \frac{2\sin t(t\cos t - \sin t)}{t^3}.$$

Des développements limités de sin et cos en 0 donnent :

$$t\cos t - \sin t = t\big(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\big) - \big(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\big) = -\frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

d'où :

$$\varphi'(t) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{3}t \quad \text{puis} \quad \lim_{t\to 0^+} \varphi'(t) = 0$$

ce qui assure la conclusion.

φ' est intégrable sur $[0,+\infty[$. C'est une conséquence du fait que φ' est continue sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in [1,+\infty[,\ \left|\varphi'(t)\right| \leqslant \frac{2(t+1)}{t^3} \leqslant \frac{4}{t^2}.$$

2) Pour $t = 0$, $U_n(0) = u_n$ et, par hypothèse, $\sum u_n$ est convergente.

Pour $t > 0$, la convergence de $\sum U_n(t)$ résulte de $|U_n(t)| \leqslant \dfrac{A}{n^2 t^2}$ où on a posé $A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puisque convergente).

> Remarquons que, ne sachant rien de la série $\sum |u_n|$, la majoration évidente $|U_n(t)| \leqslant |u_n|$ ne permet pas d'aboutir.

3) On a affaire à la somme d'une série de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ qui converge normalement donc uniformément sur tout intervalle compact $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

En effet $t \geqslant a > 0$ donne :

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{A}{n^2 a^2}.$$

4) a) Supposons $t > 0$. Alors $u_n = r_{n-1} - r_n$ donne :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(r_{k-1} - r_k\right) \frac{\sin^2 kt}{k^2 t^2}.$$

La suite $\left(r_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (de limite 0), elle est donc bornée ; posons $B = \sup_{n \in \mathbb{N}} |r_n|$.

On obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |r_k\, \varphi(kt)| \leqslant \frac{B}{k^2 t^2} \quad \text{et} \quad \left|r_{k-1}\, \varphi(kt)\right| \leqslant \frac{B}{k^2 t^2}$$

ce qui assure la convergence des deux séries $\sum r_k\, \varphi(kt)$ et $\sum r_{k-1}\, \varphi(kt)$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \sum_{k=n}^{+\infty} r_k\, \varphi\left((k+1)t\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\, \varphi\left(kt\right) \\ &= r_n\, \varphi\left((n+1)t\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k \left[\varphi\left((k+1)t\right) - \varphi\left(kt\right)\right] \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, la formule reste vraie.

b) Par définition, $\forall k \geqslant n, \ |r_k| \leqslant \varepsilon_n$ donc :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|\varphi\left((k+1)t\right) - \varphi\left(kt\right)\right|\right).$$

Or :

$$\left|\varphi\left((k+1)t\right) - \varphi\left(kt\right)\right| = \left|\int_k^{k+1} \varphi'\right| \leqslant \int_k^{k+1} |\varphi'|$$

d'où :

$$|R_n(t)| \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_{n+1}^{+\infty} |\varphi'|\right) \leqslant \varepsilon_n \left(1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'|\right).$$

c) Posons :

$$K = 1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'|.$$

D'après le b), on a :

$$\| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant K\varepsilon_n \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} \| R_n \|_\infty^{[0,+\infty[} = 0$$

et la série de fonctions $\sum U_n$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la continuité de sa somme S en 0.

Partie B.
Pseudo dérivée seconde

$E_0 = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, E_2 est l'ensemble des $f \in E_0$ admettant une pseudo-dérivée seconde en tout point $x \in \mathbb{R}$.

- Si $D_2 f = 0$ alors, d'après a), f et $-f$ sont convexes. Donc f est affine.

c) - Analyse

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $D_2 f = f''$ donc :

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f''(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t + ax + b \quad \text{avec} \quad a = f'(0),\, b = f(0)$$

puis :

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t D_2 f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t + ax + b.$$

- Synthèse

$D_2 f$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t D_2 f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $g''(x) = D_2 f(x)$ donc $D_2 g = D_2 f$.

Il en résulte $D_2(f - g) = 0$ et, d'après b), $h = f - g$ est affine. En conséquence, $f = g + h$ est de classe $\mathcal{C}^2$en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et, dans ces conditions, on a déjà vu que $f'' = D_2 f$.

Partie C. Théorème de Cantor-Lebesgue.

$$f_n(x) = \rho_n \cos\left(nx + \theta_n\right) \qquad \left(f_n\right)_{\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } 0.$$

On suppose que ρ_n ne tend pas vers 0.

10) $\rho_n \not\to 0$ se traduit par : $\exists \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p_n \geqslant n,\ |\rho_{p_n}| \geqslant \alpha$.

On construit $\left(j(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant $j(0) = p_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j(n+1) = p_{1+j(n)}$, on obtient ainsi une suite vérifiant :

$$\left|\rho_{j(n)}\right| \geqslant \alpha.$$

11) On a :

$$\left|\cos\left(j(n)\,x + \theta_{j(n)}\right)\right| = \frac{1}{\left|\rho_{j(n)}\right|} \left|f_{j(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \left|f_{j(n)}(x)\right|,$$

donc de $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} j(n) = +\infty$, il résulte que :

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(j(n)\,x + \theta_{j(n)}\right) = 0.$$

12) Les fonctions $g_n\ :\ x \mapsto \cos^2\left(j(n)\,x + \theta_{j(n)}\right)$ sont continues sur $\left[0, 2\pi\right]$ et on vient de voir que la suite $\left(g_n\right)_{\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

D'autre part on a $\forall x \in [0, 2\pi],\ |g_n(x)| \leqslant 1$. La fonction constante, égale à 1, étant intégrable sur $[0, 2\pi]$, le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^2(px + \theta) = \frac{1 + \cos(2px + 2\theta)}{2}$$

donc :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(px+\theta)\,\mathrm{d}x = \pi$$

et la suite de terme général :

$$\int_0^{2\pi} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

est constante, égale à π, ce qui est évidemment contradictoire avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On a ainsi démontré, par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n = 0$.

Partie D.
Unicité du développement en série trigonométrique

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

13) Pour $\left(a_n, b_n\right) \neq 0$, on a $a_n \cos nx + b_n \sin nx = \rho_n \cos\left(nx + \theta_n\right)$ avec $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et θ_n tel que :

$$\cos\theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}.$$

Pour $a_n = b_n = 0$, cela reste vrai avec $\rho_n = 0$ et θ_n quelconque.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $f_n(x) = \rho_n \cos\left(nx + \theta_n\right)$ est convergente donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

D'après le C., on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

14) Étant convergente, la suite $\left(\rho_n\right)_{\mathbb{N}^*}$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \rho_n \leqslant M$.

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{|a_n \cos nx + b_n \sin nx|}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2},$$

ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^2} f_n$.

Les f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, la somme $-G$ de cette série est continue sur $\mathbb{R}$ et il en est de même pour G.

Il est clair que G est 2π-périodique puisque les f_n le sont.

Les coefficients de Fourier trigonométriques de G sont définis par :

$$a_p(G) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(x)\cos px\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n(x)\cos px}{n^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$b_p(G) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(x)\sin px\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n(x)\sin px}{n^2}\,\mathrm{d}x.$$

Avec :

$$\frac{|f_n(x)\cos px|}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{|f_n(x)\sin px|}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2},$$

on voit que les séries de fonctions correspondantes sont encore normalement donc uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur $[0, 2\pi]$, ce qui autorise l'intégration terme à terme :

$$a_p(G) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f_n(x)\cos px\,\mathrm{d}x, \quad b_p(G) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f_n(x)\sin px\,\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de :

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos px\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p \\ \pi & \text{si} \quad n = p \end{cases}.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin px\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p \\ \pi & \text{si} \quad n = p \end{cases}.$$

$$\text{et} \quad \int_0^{2\pi}\sin nx\cos px\,\mathrm{d}x = 0.$$

on obtient :

$$a_p(G) = -\frac{a_p}{p^2} \quad \text{et} \quad b_p(G) = -\frac{b_p}{p^2}.$$

15) Formons :

$$\begin{aligned}\cos\big(n(x+h)+\theta_n\big) + \cos\big(n(x-h)+\theta_n\big) - 2\cos\big(nx+\theta_n\big) \\ &= 2\cos\big(nx+\theta_n\big)\cos\big(nh\big) - 2\cos\big(nx+\theta_n\big) \\ &= -4\cos\big(nx+\theta_n\big)\sin^2\left(n\frac{h}{2}\right).\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\rho_n\cos\big(nx+\theta_n\big)\frac{\sin^2 n\frac{h}{2}}{\left(n\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Avec $u_n = \rho_n\cos\big(nx+\theta_n\big) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente par hypothèse.

On retrouve ainsi les conditions du A. et, avec les notations de cette partie A. :

$$\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = S\big(\frac{h}{2}\big).$$

On a vu que S est continue en 0 ce qui donne :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\big(G(x+h)+G(x-h)-2G(x)\big) = S(0) = f(x) - \frac{a_0}{2},$$

donc G est élément de E_2 avec $D_2G = f - \dfrac{a_0}{2}$.

CHAPITRE 6

Équations différentielles Calcul différentiel et intégral Géométrie différentielle

Sujets d'oraux 428

Thèmes d'étude – Problèmes 482

Sujets d'oraux

A Équations différentielles linéaires

Ex. 1

Soit a et b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\exists\lambda > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a(x) \geqslant \lambda > 0,\ \lim_{x\to+\infty} b(x) = \lim_{x\to-\infty} b(x) = 0$$

et (E) l'équation différentielle :

$$y' + a(x)\,y = b(x).$$

1) Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de limite nulle en $+\infty$.

2) Trouver les solutions de limite nulle en $-\infty$.

---

1) Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on sait écrire, au moyen d'intégrales, une expression de la solution au problème de Cauchy en (x_0, y_0).

L'unique solution de (E) telle que $f(x_0) = y_0$ est la fonction :

$$f \ :\ x \mapsto y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{t}^{x} a\right)\mathrm{d}t.$$

Avec $a(u) \geqslant \lambda$, on obtient :

$$\int_{x_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \lambda\,(x - x_0) \quad \text{pour tout } x \geqslant x_0$$

donc :

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) \leqslant \exp\big(-\lambda(x - x_0)\big)$$

et puisque $\lambda > 0$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) = 0. \tag{1}$$

Il reste ainsi à prouver que le deuxième terme tend vers 0 également.

Écrivons :

$$\int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{t}^{x} a\right)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{\frac{x}{2}} b(t)\exp\left(-\int_{t}^{x} a\right)\mathrm{d}t + \int_{\frac{x}{2}}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{t}^{x} a\right)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$, la fonction b est bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de :

$$\|b\|_\infty^{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |b(x)|.$$

D'autre part, avec $\|b\|_\infty^{[x,+\infty[} = \sup_{t\geqslant x} |b(t)|$, l'hypothèse $\lim_{+\infty} b = 0$ nous donne :

$$\lim_{x\to+\infty} \|b\|_\infty^{[x,+\infty[} = 0.$$

De (2) on déduit alors pour tout $x \geqslant x_0$:

$$\left|\int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_t^x a\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|b\|_\infty^{\mathbb{R}} \int_{x_0}^{\frac{x}{2}} e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t + \|b\|_\infty^{\left[\frac{x}{2},+\infty\right[} \int_{\frac{x}{2}}^{x} e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t$$

puis, avec $\displaystyle\int_{x_0}^{\frac{x}{2}} e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda\frac{x}{2}} - e^{-\lambda(x-x_0)}\right) < \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\frac{x}{2}}$

et $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\frac{x}{2}}\right) < \frac{1}{\lambda}$

on obtient :

$$\left|\int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_t^x a\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|b\|_\infty^{\mathbb{R}} e^{-\lambda\frac{x}{2}} + \frac{1}{\lambda}\|b\|_\infty^{\left[\frac{x}{2},+\infty\right[}$$

ce qui donne :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_t^x a\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

d'où finalement, avec (1) et (3) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2) Écrivons maintenant :

$$f(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right)\left(y_0 - \int_x^{x_0} b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)\mathrm{d}t\right).$$

Avec $a(t) \geqslant \lambda > 0$, $x < x_0$ donne :

$$\int_x^{x_0} a \geqslant \lambda\left(x_0 - x\right)$$

donc :

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) \geqslant e^{\lambda(x_0-x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right) = +\infty.$$

Pour que f tende vers 0 en $-\infty$, il est donc nécessaire que :

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x_0} b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)\mathrm{d}t = y_0\,.$$

Par ailleurs, pour $t \leqslant x_0$, on a :

$$\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right) \leqslant e^{\lambda(t-x_0)}$$

donc $t \mapsto \exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)$ est intégrable sur $]-\infty, x_0]$ et, puisque $b(t) = o(1)$ quand $t \to -\infty$, on obtient :

$$b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right) = o\left(e^{\lambda(t-x_0)}\right).$$

Donc $t \mapsto b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)$ est également intégrable, ce qui assure l'existence de :

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x_0} b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_0} b(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} a\right)\mathrm{d}t.$$

Finalement, il y a au plus une solution de limite nulle en $-\infty$, il s'agit de :

$$f\ :\ x \mapsto \int_{-\infty}^{x} b(t)\exp\left(-\int_t^x a\right)\mathrm{d}t.$$

> Par construction, cette fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il reste donc, pour conclure, à vérifier qu'elle est de limite nulle en $-\infty$.

Pour tout $t \leqslant x$, on a :

$$\exp\left(-\int_t^x a\right) \leqslant e^{\lambda(t-x)}$$

donc :

$$|f(x)| \leqslant \| b \|_\infty^{]-\infty,x]} \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda}\| b \|_\infty^{]-\infty,x]}.$$

Or $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ donne $\lim_{x\to-\infty} \| b \|_\infty^{]-\infty,x]} = 0$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

En conclusion :

$$f\ :\ x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\exp\left(-\int_t^x a\right)\mathrm{d}t$$

est l'unique solution de (E) de limite nulle en $-\infty$.

Ex. 2

On considère l'équation différentielle :

$$xy' - 2\,|y| = x. \qquad (E)$$

1) Montrer que (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver les solutions de E sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Trouver les solutions de E sur $\mathbb{R}_-^*$.

En préliminaire, on résoud les équations :

$$xy' - 2y = x \qquad (E_1)$$

$$xy' + 2y = x \qquad (E_2)$$

La solution générale de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est définie par :

$$x \mapsto \lambda x^2 - x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

et pour (E_2), il s'agit de :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1)

> Pour préciser une soluion f de (E), il est évidemment essentiel d'avoir connaissance du signe de f et, d'autre part, il est fréquent que le signe d'une fonction se déduise de l'étude des ses variations. Ce sont là deux remarques qui vont guider le raisonnement.
>
> Pour cette première question, la méthode est claire : on suppose que (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$ et on essaye d'exhiber une contradiction.

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) - 2\,|f(x)| = x \tag{1}$$

d'où, en particulier, $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 + \frac{2}{x}\,|f(x)| > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0, +\infty\right[$ et donc que :

$$\forall x > 0, f(x) > f(0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) > 0. \tag{2}$$

Alors (1) donne :

$$\forall x \in \left[0, +\infty\right[, xf'(x) - 2f(x) = x$$

et, d'après le résultat préliminaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left[0, +\infty\right[, f(x) = \lambda x^2 - x.$$

Donc, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, on a $f(x) \sim -x$ ce qui est bien sûr en contradiction avec (2).

On a ainsi prouvé, par l'absurde, que (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

2) Remarquons que les théorèmes du programme ne nous permettent pas de dire s'il y a des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas plus que sur $\mathbb{R}_-^*$). Nous allons donc procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, on donne une description des solutions possibles, et dans la synthèse, on détermine quelles sont parmi les possibilités fournies par l'analyse celles qui donnent effectivement des solutions de (E).

- Analyse

Si f est une solution de (E) sur $\left]0, +\infty\right[$ on montre, comme dans le 1), que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a donc trois cas de figure à considérer : $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f s'annule une fois et une seule.

Comme dans le 1), on voit que le premier cas est à rejeter.

Dans le deuxième cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[, f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}$$

d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{3}$ ce qui est contradiction avec $f < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ce cas est donc également à rejeter.

Dans le troisième cas, f étant strictement croissante, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$f(x) < 0 \text{ sur } \left]0, a\right[\quad , \quad f(a) = 0 \quad , \quad f(x) > 0 \text{ sur } \left]a, +\infty\right[.$$

Sur $\left]0, a\right[$, on a $xf'(x) + 2f(x) = x$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left[0, a\right[, f(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}$$

et, avec $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = 0$, il vient $\lambda = -\dfrac{a^3}{3}$ donc $f(x) = \dfrac{x^3 - a^3}{3x^2}$.

Sur $\left]a, +\infty\right[$, on a $xf'(x) - 2f(x) = x$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left]a, +\infty\right[, f(x) = \mu x^2 - x$$

et avec $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0$, il vient $\mu = \dfrac{1}{a}$ donc $f(x) = \dfrac{x^2}{a} - x$.

Pour a décrivant $\mathbb{R}_+^*$, on a là les seules solutions possibles de (E) sur $\left]0, +\infty\right[$.

■ Synthèse

Étant donné $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit f_a la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - a^3}{3x^2} & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x = a \\ \dfrac{x^2 - ax}{a} & \text{pour } x > a \end{cases}$$

L'étude des équations (E_1) et (E_2) montre que $f_{a|]0,a[}$ est solution de (E) sur $]0, a[$ tandis que $f_{a|]a,+\infty[}$ est solution de (E) sur $]a, +\infty[$.

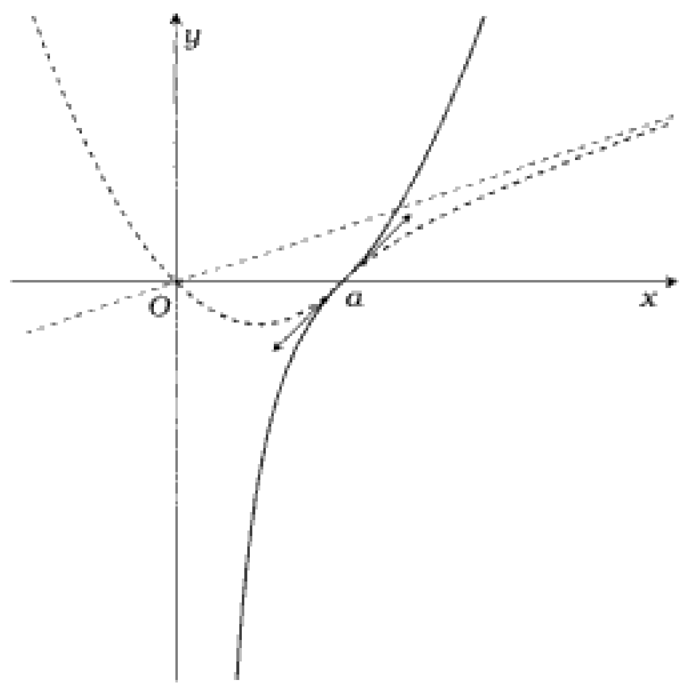
f_a étant évidemment continue en a avec $f_a(a) = 0$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}, f_a'(x) = \frac{2}{x}\,|f_a(x)| + 1$$

montre que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f_a'(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f_a'(x) = 1$$

et on en déduit que f_a est dérivable en a avec $f_a'(a) = 1$, et en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis que f_a est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.



3) ■ Analyse

Soit f une solution de (E) sur $]-\infty, 0[$. Envisageons encore trois cas.

Premier cas : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) > 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[, xf'(x) - 2f(x) = x$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \lambda x^2 - x.$$

De plus, en notant que pour $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \lambda x^2$, on voit que l'on a nécessairement $\lambda \geqslant 0$.

Deuxième cas : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) < 0$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0[, xf'(x) + 2f(x) = x$. donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

Hidden page

relations que nous écrirons plus simplement :

$$(1) \quad x'' + px' + qx = 0$$

$$(2) \quad 2x'^2 - xx'' - pxx' + qx^2 = 0.$$

En effectuant sur ces équations la transformation symbolisée par (3) = (1) × x + (2), on obtient :

$$(3) \quad x'^2 + qx^2 = 0$$

ce qui donne une première condition :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) \leqslant 0 \qquad \text{(i)}$$

Puisque q, x et x' sont, au moins, de classe $\mathcal{C}^1$, l'équation (3) donne :

$$2x'x'' + 2xx'q + q'x^2 = 0 \quad \text{soit} \quad 2\frac{x'}{x}\left(\frac{x''}{x} + q\right) + q' = 0 \quad (4)$$

Or (1) s'écrit aussi :

$$\frac{x''}{x} + q = -p\frac{x'}{x}$$

d'où, avec (4), $-2p\dfrac{x'^2}{x^2} + q' = 0$ et, puisque d'après (3), $\dfrac{x'^2}{x^2} = -q$, il vient finalement :

$$2pq + q' = 0 \qquad \text{(ii)}$$

- *Condition suffisante*

On suppose maintenant que p et q vérifient (i) et (ii).

En regardant (ii) comme une équation linéaire du premier ordre en q, il vient que si q s'annule en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ alors q est identiquement nulle. Il y a donc deux cas à considérer :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ q(t) \neq 0.$$

• Premier cas : q est identiquement nulle.

Alors les fonctions constantes sont solutions de (E) et, quel que soit $k \in \mathbb{R}^*$, le couple (x_1, x_2) constitué des fonctions constantes égales à k et $\dfrac{1}{k}$ vérifie bien $x_1x_2 = 1$.

• Deuxième cas : q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc, d'après (i), $\forall t \in \mathbb{R},\ q(t) < 0$.

> Dans l'étude des conditions nécessaires, une équation est particulièrement intéressante, c'est (3) car elle est du premier ordre et permet aisément d'expliciter x.

Posons :

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{-q(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = e^{u(t)},\ x_{-1}(t) = e^{-u(t)}.$$

x_1 et x_{-1} sont solutions de $x'^2 + qx^2 = 0$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t)x_{-1}(t) = 1.$$

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a :

$$x_\varepsilon(t) = e^{\varepsilon u(t)} \quad \text{donc} \quad x'_\varepsilon(t) = \varepsilon u'(t)e^{\varepsilon u(t)} = \varepsilon\sqrt{-q(t)}x_\varepsilon(t)$$

et, puisque q ne s'annule pas :

$$x''_\varepsilon(t) = \frac{-\varepsilon q'(t)}{2\sqrt{-q(t)}}x_\varepsilon(t) - q(t)x_\varepsilon(t).$$

Avec $q' = -2pq$, on en déduit :

$$x''_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon\, p(t)\, q(t)}{\sqrt{-q(t)}}x_\varepsilon(t) - q(t)\,x_\varepsilon(t) = -\,\varepsilon\, p(t)\sqrt{-q(t)}x_\varepsilon(t) - q(t)x_\varepsilon(t)$$

et enfin :

$$x_\varepsilon''(t) + p(t)x_\varepsilon'(t) + q(t)x_\varepsilon(t) = 0.$$

Ainsi x_1 et x_{-1} sont solutions de (E) telles que $x_1 x_{-1} = 1$.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante est :

$$q \leqslant 0 \ \text{(i)} \quad \text{et} \quad q' + 2pq = 0 \ \text{(ii)}.$$

On peut remarquer que (ii) donne $q = \lambda e^{-2P}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et :

$$P \,:\, t \mapsto \int_0^t p(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Les conditions (i) et (ii) sont donc équivalentes à :

$$q = \lambda e^{-2P}, \ \lambda \leqslant 0, \ P \,:\, t \mapsto \int_0^t p.$$

Ex. 5

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2x\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

> Dans ce genre de situation, il est utile de commencer par constater que, si f est solution du problème, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
>
> Ceci étant fait, une démarche usuelle consiste à déterminer une équation différentielle dont f est solution. Dans certains exemples, il sera plus facile d'exhiber une équation différentielle vérifiée par une fonction F apparentée (simplement) à f, et c'est le cas ici avec :
>
> $$F \,:\, x \mapsto \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si f est solution du problème, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 1 + 2x\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2x\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc, sachant que lorsque u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on obtient que f de classe $\mathcal{C}^n$ implique f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

En conséquence il vient, par récurrence, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Étant donné $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, introduisons $F \,:\, x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

En écrivant, comme précédemment :

$$F(x) = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t,$$

on voit que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = f(x) - \sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$F''(x) = f'(x) - \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= f'(x) - \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = f'(x) - F(x).$$

Hidden page

Alors, en posant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$, (2) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S''(x) - 2x\,S'(x) - S(x) = 0$$

et, avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, on retrouve $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$.

Ainsi, par unicité au problème de Cauchy pour l'équation (E) au point $(0, 0, 1)$ on a finalement $S = F$, et en conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

donc :

$$f(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} x^{2n}.$$

B Équations différentielles non linéaires

Ex. 6

Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

1) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ k > \lambda + \dfrac{(kt)^2}{1+t^2}$.

2) Soit (I, f) la solution maximale du problème de Cauchy :

$$x'(t) = \lambda + \frac{x(t)^2}{1+t^2}, \quad x(0) = 0.$$

a) Montrer que f est impaire. On pose alors $I = \left]-a, a\right[$.

b) Montrer que $\forall t \in \left]0, a\right[,\ \lambda t \leqslant f(t) < kt$.

c) Montrer que $I = \mathbb{R}$.

1) Posons $\varphi(t) = k - \lambda - \dfrac{(kt)^2}{1+t^2}$. La fonction φ ainsi définie est paire et telle que :

$$\varphi'(t) = -\frac{2k^2 t}{(1+t^2)^2}$$

elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et, compte tenu de $\varphi(0) = k - \lambda$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = k - \lambda - k^2$, on obtient :

$$\varphi(\mathbb{R}) = \left]k - \lambda - k^2, k - \lambda\right].$$

En conséquence, la proposition $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$ équivaut à $k - \lambda - k^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$k^2 - k + \lambda \leqslant 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}.$$

> Remarquer que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{4}$ donne $1 - 4\lambda \geqslant 0$ et $\lambda > 0$ donne $\dfrac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2} > 0$.

Hidden page

En conséquence, si Z_f est non vide, on a quatre possibilités :

(1) si Z_f est fini :

$$Z_f = \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} ;$$

(2) si Z_f est infini minoré et non majoré :

$$Z_f = \{x_i \ / \ i \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty ;$$

(3) si Z_f est infini majoré et non minoré :

$$Z_f = \{x_i \ / \ i \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad x_{i+1} < x_i \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty ;$$

(4) si Z_f est infini non majoré et non minoré :

$$Z_f = \{x_i \ / \ i \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad x_i < x_{i+1} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \ \lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty.$$

3) D'après le 1), le cas $Z_f = \varnothing$ est impossible car, lorsque f solution de (E) ne s'annule pas sur I, l'intervalle I n'est jamais égal à $\mathbb{R}$.

Il nous reste donc, pour Z_f, les quatre cas précédents. En tenant compte du 1) on exhibe les solutions f possibles.

Lorsque Z_f est minoré, si x_1 est le plus petit zéro de f, sur $]-\infty, x_1[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0} \operatorname{sh}\Big(\omega_0 \left(x_1 - x\right)\Big) \quad \text{ou} \quad f(x) = \varepsilon_0 \left(x_1 - x\right), \quad \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}.$$

Pour la suite, nous poserons :

$$f_{-\infty,1} \ : \ x \mapsto \frac{1}{\omega_0} \operatorname{sh}\Big(\omega_0 \left(x_1 - x\right)\Big),$$

$$\text{et} \quad g_{-\infty,1} \ : \ x \mapsto x_1 - x.$$

De même, lorsque Z_f est majoré, si x_n est le plus grand zéro de f, sur $]x_n, +\infty[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \varepsilon_n f_{n,+\infty}(x) \quad \text{ou} \quad f(x) = \varepsilon_n g_{n,+\infty}(x), \quad \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$$

avec $f_{n,\infty} \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{\omega_n} \operatorname{sh}\Big(\omega_n \left(x - x_n\right)\Big)$ et $g_{n,+\infty} \ : \ x \mapsto x - x_n$.

Enfin, si $\operatorname{Card} Z_f \geqslant 2$ et si x_i, x_{i+1} sont deux zéros consécutifs, sur $]x_i, x_{i+1}[$ on a nécessairement :

$$f(x) = \varepsilon_i f_{i,i+1}(x) \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

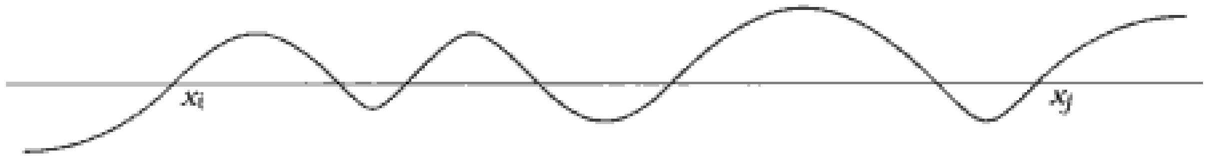
où on a posé $f_{i,i+1} \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{\omega_i} \sin\Big(\omega_i \left(x - x_i\right)\Big)$ avec $\omega_i = \dfrac{\pi}{x_{i+1} - x_i}$.

En fixant arbitrairement Z_f de l'une des quatre formes dégagées dans le 2), on obtient toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ par raccordement des fonctions précédentes.

On peut constater que, quel que soit le choix des constantes ε_i, on a affaire à des raccordements continus en chaque point x_i. Par contre, pour que la fonction f ainsi définie soit dérivable en x_i, il est nécessaire que $\omega_i = -\omega_{i-1}$. Ces conditions étant réalisées, il reste des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ (en chaque point x_i, $f'(x_i) = \pm 1$ et $f''(x_i) = 0$) et solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donnons ci-après les diverses courbes intégrales.

c) Z_f n'est ni majoré ni minoré.



À ces courbes, il convient d'ajouter leurs symétriques par rapport à Ox.

Ⓒ Dérivées partielles – Différentielle – Gradient

Ex. 8

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = y\, g(x, y).$$

> Pour x fixé, $f(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ s'interprète comme l'accroissement sur $[0, y]$ de la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$. En ce qui concerne la définition de g, on est ainsi ramené à un problème de fonction d'une variable réelle.

Notons h la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

La continuité de $t \mapsto h(x, t)$ permet d'écrire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) = \int_0^y h(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $y \neq 0$, le changement de variable défini par $t = uy$ donne alors :

$$f(x, y) = y \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

En remarquant que cette égalité reste vraie lorsque $y = 0$, on obtient finalement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y\,g(x, y) \quad \text{avec} \quad g(x, y) = \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

> Il reste à démontrer que la fonction g ainsi définie est, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$. Une démonstration par récurrence s'impose.

La fonction $(x, y, u) \mapsto h(x, uy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ donc, l'intervalle d'intégration étant compact, en corollaire du théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient que les fonctions partielles :

$$x \mapsto \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_0^1 h(x, uy)\,\mathrm{d}u$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, uy)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 u\frac{\partial h}{\partial y}(x, uy)\,\mathrm{d}u.$$

Hidden page

L'espace E étant de dimension finie, cette seule relation montre que $Q(u)$ est inversible avec :

$$Q(u)^{-1} = B(u).$$

> On sait cependant que l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ des polynômes en u est commutative et on pourrait donc écrire $B(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ B(u) = \mathrm{Id}_E$ ce qui donne l'inversibilité de $Q(u)$ sans recours à la dimension finie.

3) Il est clair que Ψ_u est linéaire ce qui en fait un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $\Psi_u \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E)\big)$.

> N'oublions pas la dimension finie : $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$! Pour prouver l'égalité $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\Phi_u = \mathrm{Im}\, \Psi_u$, il suffit par exemple d'établir l'inclusion $\mathrm{Im}\, \Psi_u \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\Phi_u$ puis de raisonner sur les dimensions.

Pour $\omega \in \mathrm{Im}\, \Psi_u$, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\omega = u \circ v - v \circ u$ et alors, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a aussi $\omega = \big(u - \lambda\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v - v \circ \big(u - \mathrm{Id}_E\big)$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, \Phi_u\,(\omega) &= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1}^{i-1} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ \Big[\big(u - a_i\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v - v \circ \big(u - a_i\, \mathrm{Id}_E\big)\Big] \circ \prod_{k=i+1}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1}^{i} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=i+1}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{p} \prod_{k=1}^{i-1} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=i}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \\
&= P(u) \circ v + \sum_{i=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{i} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=i+1}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) - v \circ P(u) \\
&\qquad - \sum_{i=2}^{p} \prod_{k=1}^{i-1} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=i}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big).
\end{aligned}$$

Donc, puisque $P(u) = 0$, en posant $j = i - 1$ dans la deuxième somme, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, \Phi_u\,(\omega) &= \sum_{i=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{i} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=i+1}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{j} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) \circ v \circ \prod_{k=j+1}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) = 0.
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $\mathrm{Im}\, \Psi_u \subset \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\Phi_u$.

> Pour comparer les dimensions de $\mathrm{Im}\, \Psi_u$ et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\Phi_u$, il suffit, compte tenu du théorème du rang, de comparer celles de $\mathrm{Ker}\, \Psi_u$ et $\mathrm{Im}\, \mathrm{d}\Phi_u$.

Si $v \in \mathrm{Ker}\, \Psi_u$, v permute avec u donc aussi avec tout polynôme en u et on obtient :

$$\mathrm{d}\, \Phi_u\,(v) = v \circ \sum_{i=1}^{p} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \big(u - a_k\, \mathrm{Id}_E\big) = v \circ P'(u) = P'(u) \circ v.$$

Puisque P est à racines simples, on a $P \wedge P' = 1$ et d'après le 2), $P'(u)$ est inversible d'où :

$$v = P'(u)^{-1} \circ \mathrm{d}\, \Phi_u\,(v).$$

Sachant que $u \circ P'(u) = P'(u) \circ u$, on obtient :

$$P'(u)^{-1} \circ u = u \circ P'(u)^{-1}$$

Soit q la forme quadratique définie par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

pour $x \neq 0$, on a :

$$q(x) = \| x \|^2 q\left(\frac{x}{\| x \|}\right) \quad \text{et} \quad \frac{x}{\| x \|} \in S$$

où S désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. S étant un compact de $\mathbb{R}^n$ (fermé borné) et q étant continue sur S (fonction polynôme), il existe $v \in S$ tel que :

$$q(v) = \max_{x\in S} q(x).$$

q est définie-négative donc $q(v) < 0$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q(v) = -2\alpha$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant -2\alpha\| x \|^2.$$

Chaque fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ est continue en 0, donc il existe $r_{ij} > 0$ tel que :

$$\| x \| < r_{ij} \;\Rightarrow\; \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}$$

et il en résulte :

$$\| x \| < r_{ij} \;\Rightarrow\; \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}.$$

En posant $r = \min\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} r_{ij}$ on a $r > 0$ et :

$$\| x \| < r \;\Rightarrow\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!],\ \forall t \in [0,1],\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}$$

donc :

$$\| x \| < r \;\Rightarrow\; \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(tx) - a_{ij}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\alpha}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_ix_j| \leqslant \alpha\| x \|^2$$

(car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_ix_j| = \| x \|^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_i|}{\| x \|}\frac{|x_j|}{\| x \|} \leqslant n^2\| x \|^2$).

Finalement, pour $\| x \| < r$, on a $g(x) \leqslant -\alpha\| x \|^2$.

2) Il est raisonnalble d'espérer pouvoir utiliser le résultat du 1) et, pour ce faire, on va essayer de montrer que $u(t) \in B(0,r)$ quel que soit $t \in \mathbb{R}_+$.

On a $g\big(u(t)\big) = \big\langle \operatorname{grad} f_{u(t)} \,\big|\, u(t)\big\rangle = \big\langle u'(t) \,\big|\, u(t)\big\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u(t) \|^2$.

On va donc s'intéresser aux variations de $t \mapsto \| u(t) \|$.

Soit $A = \big\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall t \in [0,\alpha],\ \langle u'(t) \,|\, u(t)\rangle \leqslant 0\big\}$.

- A est non vide car $\langle u'(0) \,|\, u(0)\rangle = g\big(u(0)\big) \leqslant -\alpha\| u(0) \|^2 < 0$.
- Supposons A majoré. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $\gamma = \sup A$.

Par continuité de $t \mapsto \langle u't) \,|\, u(t)\rangle$ on a $\langle u'(\gamma) \,|\, u(\gamma)\rangle \leqslant 0$, et :

$$\forall t \in [0,\gamma],\ \langle u'(t) \,|\, u(t)\rangle \leqslant 0.$$

Ainsi $t \mapsto \| u(t) \|^2$ est décroissante sur $[0, \gamma]$, donc $\| u(\gamma) \| \leqslant \| u(0) \|$ et $u(\gamma) \in B(0, r)$; puis, par continuité de u, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [\gamma, \gamma + \eta],\ u(t) \in B(0, r)$$

($B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x \| < r\}$ est ouvert) donc :

$$\forall t \in [0, \gamma + \eta],\ \langle u'(t) \mid u(t) \rangle \leqslant -a \| u(t) \|^2 \leqslant 0$$

ce qui donne $\gamma + \eta \in A$, qui est en contradiction avec $\gamma = \sup A$.

En conséquence :

- A est non majoré et donc $A = \mathbb{R}_+$;
- $t \mapsto \| u(t) \|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc admet une limite en $+\infty$;
- $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u(t) \in B(0, r),\ g(u(t)) \leqslant -a \| u(t) \|^2$.

On a alors $\| u(t) \|^2 - \| u(0) \|^2 = 2 \displaystyle\int_0^t g(u(\xi)) \mathrm{d}\xi$, donc :

$$\| u(t) \|^2 \leqslant \| u(0) \|^2 - 2a \int_0^t \| u(\xi) \|^2 \mathrm{d}\xi$$

et, en posant $\lim\limits_{+\infty} \| u(\xi) \| = \ell \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+,\ \| u(\xi) \| \geqslant \ell$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \| u(t) \|^2 \leqslant \| u(0) \|^2 - 2at\ell^2,$$

ce qui nécessite $\ell = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.

Ex. 11

$\mathbb{R}^k$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$, minorée.

Montrer qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de $\mathbb{R}^k$ telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0.$$

Indication. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérer :

$$g_n\ :\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + \frac{1}{n} \| x \|$$

et montrer qu'il existe $x_n \in \mathbb{R}^k$ tel que $\| \operatorname{grad} f(x_n) \| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Remarquons que si $\operatorname{grad} f(x_n) \neq 0$, on a :

$$\| \operatorname{grad} f(x_n) \| = \left\langle \operatorname{grad} f(x_n) \,\middle|\, \frac{\operatorname{grad} f(x_n)}{\| \operatorname{grad} f(x_n) \|} \right\rangle = \langle \operatorname{grad} f(x_n) \mid u \rangle$$

(où on a posé $u = \dfrac{\operatorname{grad} f(x_n)}{\| \operatorname{grad} f(x_n) \|}$) donc $\| \operatorname{grad} f(x_n) \| = df_{x_n}(u)$ et on reconnaît la dérivée de f au point x_n suivant le vecteur u, d'où aussi :

$$\| \operatorname{grad} f(x_n) \| = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_n + tu) - f(x_n)}{t}.$$

On va donc relier la question à un problème d'extremum et, plus précisément, de minimum puisque f est supposée minorée.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, sinon le problème est évident et on introduit les fonctions g_n données en indication.

Puisque f est minorée, il existe $m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^k} f(x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on a :

$$g_n(x) \geqslant m + \frac{1}{n}\| x \|.$$

Donc g_n est minorée et on a $m_1 = \inf\limits_{\mathbb{R}^k} g_n \geqslant m$.

> On se heurte ici à une difficulté car on n'est pas certain que cette borne inférieure soit atteinte.

Considérons $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r > n\left(m_1 - m\right)$ et posons $B_r = \left\{x \in \mathbb{R}^k \,/\, \| x \| \leqslant r\right\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $\| x \| > r$, on a :

$$g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\| x \| > m + \frac{r}{n} \quad \text{donc} \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^k \setminus B_r} g_n(x) \geqslant m + \frac{r}{n} > m_1$$

et en conséquence :

$$m_1 = \inf_{x \in \mathbb{R}^k} g_n(x) = \inf_{x \in B_r} g_n(x).$$

Puisque la boule B_r est compacte, g_n étant continue sur $\mathbb{R}^k$ donc sur cette boule, il existe $x_n \in B_r$ tel que :

$$g_n\left(x_n\right) = \inf_{x \in B_r} g_n(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^k} g_n(x).$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on a :

$$f\left(x_n\right) + \frac{1}{n}\|x_n\| \leqslant f(x) + \frac{1}{n}\| x \|$$

donc :

$$f\left(x_n\right) \leqslant f(x) + \frac{1}{n}\left(\| x \| - \|x_n\|\right) \leqslant f(x) + \frac{1}{n}\|x - x_n\|.$$

Pour $u \in \mathbb{R}^k$, tel que $\| u \| = 1$ et $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité précédente, avec $x = x_n + tu$, donne :

$$f\left(x_n\right) \leqslant f\left(x_n + tu\right) + \frac{1}{n}|t| \quad \text{soit} \quad f\left(x_n\right) - f\left(x_n + tu\right) \leqslant \frac{1}{n}|t|.$$

Imposons de plus $t < 0$, cette dernière inégalité devient :

$$\frac{f\left(x_n\right) - f\left(x_n + tu\right)}{-t} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{soit} \quad \frac{f\left(x_n + tu\right) - f\left(x_n\right)}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre t vers 0, avec $t < 0$, on obtient alors :

$$df_{x_n}(u) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\langle \operatorname{grad} f\left(x_n\right) \,\middle|\, u \right\rangle \leqslant \frac{1}{n}.$$

Il reste à prendre :

$$u = \frac{\operatorname{grad} f\left(x_n\right)}{\left\|\operatorname{grad} f\left(x_n\right)\right\|}$$

pour obtenir :

$$\left\|\operatorname{grad} f\left(x_n\right)\right\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ex. 12

1) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et minorée.
Montrer qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$.

2) $\mathbb{R}^k$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit f une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 et minorée.
Montrer qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^k\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0$.
Indication. On pourra considérer une solution maximale de l'équation différentielle :

$$x' = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \qquad (E)$$

Remarque. L'exercice précédent propose une autre méthode, applicable dans le cas où f est seulement supposée de classe C^1.

1) S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$, la suite constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = a$ convient. Sinon f' conserve un signe constant donc f est strictement monotone. D'autre part, puisqu'elle est minorée, f admet une borne inférieure :
– si f est croissante, $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} f = \lim\limits_{-\infty} f$;
– si f est décroissante, $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} f = \lim\limits_{+\infty} f$.
Supposons f décroissante, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f' = \lim_{n\to+\infty} \big(f(n+1) - f(n)\big) = 0.$$

Or, puisque f' est continue, on a :

$$\inf_{[n,n+1]} f' \leqslant \int_n^{n+1} f' \leqslant \sup_{[n,n+1]} f'$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in [n, n+1]$ tel que :

$$\int_n^{n+1} f' = f'(x_n),$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue convient.
Le cas où f est croissante se ramène au précédent en introduisant la fonction $g\ :\ x \mapsto f(-x)$.

2) S'il existe $a \in \mathbb{R}^k$ tel que $\operatorname{grad} f(a) = 0$, la suite constante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$ convient. Sinon la fonction :

$$F\ :\ x \mapsto \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^k.$$

> On se trouve donc alors dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'équation différentielle autonome $x' = F(x)$. (E)

F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^k$, on sait que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^k$, il existe une unique solution maximale g de (E), définie sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et telle que $g(t_0) = x_0$.
Puisque $\|g'(t)\| = 1$, la fonction g' est intégrable sur tout intervalle borné. On en déduit que I n'est borné ni supérieurement, ni inférieurement et donc que $I = \mathbb{R}$.

> Sinon g serait strictement prolongeable par une solution $\widehat{g}$ de (E) ce qui est contraire à son caractère maximal.

Alors $h = f \circ g$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et elle est bornée inférieurement donc, d'après le 1), il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} h'(u_n) = 0.$$

Or :

$$h'(u_n) = df_{g(u_n)}\left(g'(u_n)\right) = \langle \operatorname{grad} f\left(g(u_n)\right) \mid g'(u_n)\rangle$$

$$\text{et} \quad g'(u_n) = \frac{\operatorname{grad} f\left(g(u_n)\right)}{\left\|\operatorname{grad} f\left(g(u_n)\right)\right\|}$$

donc :

$$h'(u_n) = \left\|\operatorname{grad} f\left(g(u_n)\right)\right\|.$$

Ainsi, en posant $x_n = g(u_n)$, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^k$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0.$$

D Extremums

Ex. 13

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{si } x \neq y,\ \phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

1) Montrer que :

$$\phi(x, y) = \int_0^1 f'\left((1-t)x + ty\right) \mathrm{d}t.$$

En déduire que ϕ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer :

$$J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur des dérivées partielles de ϕ sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

3) On suppose ici $f(x) = \sin x$. Tracer l'ensemble (E) d'équation $\phi(x, y) = 0$. Déterminer les extrémums de ϕ.

1) Pour $x \neq y$, on a :

$$\int_0^1 f'\left((1-t)x + ty\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{f\left((1-t)x + ty\right)}{y - x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \phi(x, y).$$

En corollaire du théorème de dérivation sous le signe somme, puisque l'intervalle d'intégration est compact, le fait que la fonction :

$$(x, y, t) \mapsto f'\left((1-t)x + ty\right)$$

soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ donne que :

$$\Phi \; : \; (x,y) \mapsto \int_0^1 f'\big((1-t)x + ty\big)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a ainsi prolongé ϕ en une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

> Pour tout pavé compact $[a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, les fonctions :
>
> $$(x,y,t) \mapsto (1-t)f''\big((1-t)x+ty\big) \quad \text{et} \quad (x,y,t) \mapsto t f''\big((1-t)x+ty\big)$$
>
> sont dominées par des constantes pour $(x,y,t) \in [a,b] \times [c,d] \times [0,1]$, ce qui permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, avec domination locale, et ainsi obtenir l'existence de :
>
> $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$
>
> Les mêmes dominations locales donnent ensuite la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de ces deux dérivées partielles, donc la classe $\mathcal{C}^1$ de Φ.
>
> On termine par récurrence : en supposant Φ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$, le même raisonnement montre que chaque dérivée d'ordre n est de classe $\mathcal{C}^1$ donc que Φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Toutes les dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe somme :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p\,\partial y^q}(x,y) = \int_0^1 (1-t)^p t^q f^{(p+q+1)}\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t.$$

2) Une intégration par parties donne pour $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t = \left[(1-t)^p \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q+1}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{q+1} J_{p-1,q+1}$$

d'où :

$$J_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)\ldots(q+p)} J_{0,p+q}$$

et, avec $J_{0,p+q} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$, il vient :

$$J_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p\,\partial y^q}(x,x) = f^{(p+q+1)}(x) J_{p,q} = f^{(p+q+1)}(x)\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

3) Pour tout (x,y), on a :

$$\Phi(x,y) = \int_0^1 \cos\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et, si } x \neq y,\ \Phi(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Pour $x \neq y$, $\Phi(x,y) = 0$ équivaut à $\sin x = \sin y$ donc à $y = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, ou $y = \pi - x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

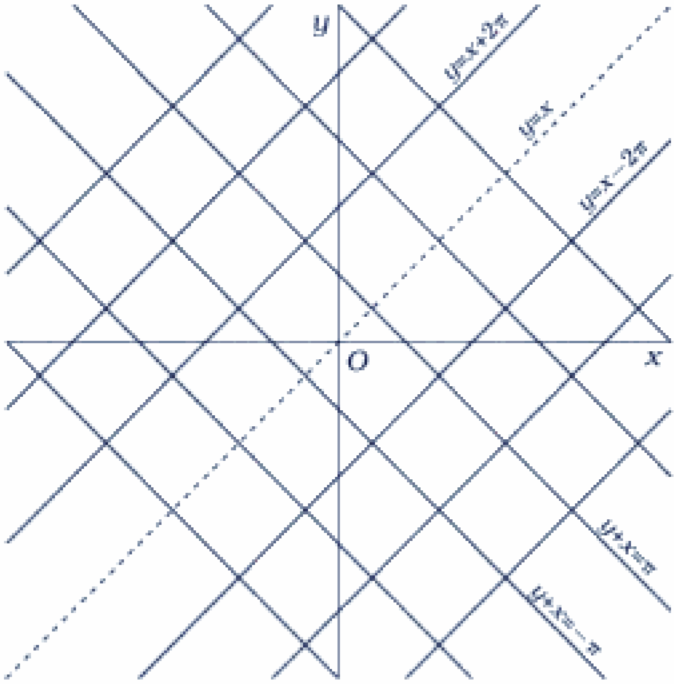
Pour $x = y$, $\Phi(x,x) = 0$ s'écrit :

$$\int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \cos x = 0$$

ce qui correspond à $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En résumé, $\Phi(x,y)=0$ équivaut à $y=x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$ ou $y=\pi-x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble (E) est donc constitué de deux familles de droites parallèles, de directions $(y=x)$ pour l'une, $(y=-x)$ pour l'autre.



Recherche des extremums

Avec $\Phi(x+\pi,y+\pi)=\Phi(x,y)$, on peut se limiter à $(x,y)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$;

et avec $\Phi(-x,-y)=\Phi(x,y)$, on se limite à $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$.

Les points critiques sont donnés par le système :

$$(S)\ :\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=0.$$

Quel que soit (x,y), ces dérivées partielles s'écrivent :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\int_0^1 -(1-t)\sin\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=\int_0^1 -t\sin\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t$$

et pour $x\neq y$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\frac{(x-y)\cos x-\sin x+\sin y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=\frac{(y-x)\cos y-\sin y+\sin x}{(x-y)^2}.$$

Dans le cas $x=y$, le système (S) équivaut à $\sin x=0$ ce qui, avec $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, donne un seul point critique : $(0,0)$.

Dans le cas $x\neq y$, le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases}(x-y)\cos x=\sin x-\sin y\\(x-y)\cos y=\sin x-\sin y\end{cases}\quad\text{donc à}\quad\begin{cases}\cos x=\cos y\\(x-y)\cos x=\sin x-\sin y\end{cases}$$

$\cos x=\cos y$ donne $y=x+2\,\ell\,\pi$, $\ell\in\mathbb{Z}$ ou $y=-x+2\,\ell\,\pi$, $\ell\in\mathbb{Z}$.

Pour $y = x + 2\ell\pi$, on a $\sin x = \sin y$ donc $(x - y)\cos x = 0$ et, compte tenu de $x \neq y$, on obtient $\cos x = 0$. Avec la condition $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, les points critiques correspondants sont :

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right), \quad \ell \in \mathbb{Z}^*.$$

Pour $y = -x + 2\ell\pi$, on a $\sin y = -\sin x$ et la seconde équation devient $(x - \ell\pi)\cos x = \sin x$ qui équivaut à $x - \ell\pi = \tan x$.

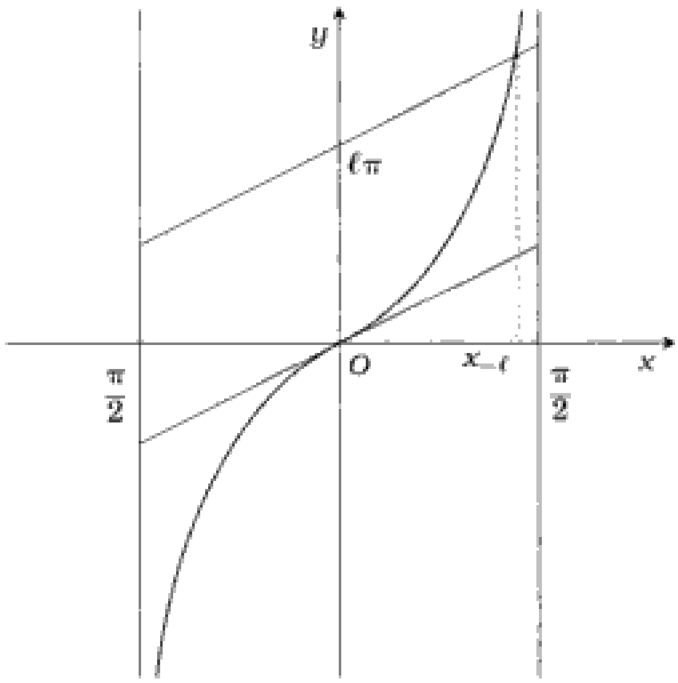
Quel que soit $\ell \in \mathbb{Z}$, cette dernière équation admet une solution x_ℓ et une seule dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que :

$$x_\ell \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ si } \ell < 0, x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_\ell \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\text{ si } \ell > 0.$$

Seul le cas $\ell < 0$ nous donne des points critiques vérifiant $x \neq y$ et $(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$.

Finalement, les points critiques de la bande $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$ sont :

$$(0, 0), \text{ les points } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}^*, \text{ et les points } \left(x_\ell, 2\ell\pi - x_\ell\right), \ell \in \mathbb{Z}_-^*.$$



Il reste à déterminer quels sont parmi ces points ceux qui correspondent effectivement à des extremums.

L'expression :

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \cos\big((1 - t)x + ty\big)\,\mathrm{d}t$$

donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\Phi(x, y)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0, 0) = 1$$

donc, en $(0, 0)$, Φ atteint son maximum (absolu).

On a vu précédemment que les points $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right), \ell \in \mathbb{Z}^*$, appartiennent à l'ensemble (E) :

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) = 0.$$

Pour savoir si l'un de ces points est ou n'est pas un extremum local, nous sommes donc ramenés à l'étude du signe de Φ dans son voisinage.

Lorsque (x, y) tend vers $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right)$, $x - y$ tend vers $-2\ell\pi \neq 0$, on a donc :

$$\Phi(x, y) = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \sim \frac{\sin y - \sin x}{2\ell\pi}.$$

Tout voisinage de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right)$ contient :

$$\text{des points } \left(\frac{\pi}{2}, y\right) \qquad \text{avec} \quad 0 < \left|y - \frac{\pi}{2} - 2\ell\pi\right| < \pi$$

$$\text{et des points } \left(x, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) \qquad \text{avec} \quad 0 < \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \pi$$

et, dans le premier cas $\frac{\sin y - \sin x}{2\ell\pi} = \frac{\sin y - 1}{2\ell\pi}$ est non nul, du signe de $-\ell$, tandis que dans le second cas $\frac{\sin y - \sin x}{2\ell\pi} = \frac{1 - \sin x}{2\ell\pi}$ est non nul, du signe de ℓ.

Ainsi tout voisinage de $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right)$, avec $\ell \in \mathbb{Z}^*$, contient des points (x, y) tels que $\Phi(x, y) > 0$ et des points (x', y') tels que $\Phi(x', y') < 0$: on n'a pas affaire à un extremum, c'est un point col.

Pour les points $(x_\ell, 2\ell\pi - x_\ell)$, $\ell \in \mathbb{Z}_-^*$, dans leur voisinage, on a $x \neq y$ donc :

$$\Phi(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\cos x}{x - y} - \frac{\sin x - \sin y}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\sin x}{x - y} - 2\frac{\cos x}{(x - y)^2} + 2\frac{\sin x - \sin y}{(x - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}(x, y) = \frac{\cos x}{(x - y)^2} + \frac{\cos y}{(x - y)^2} - 2\frac{\sin x - \sin y}{(x - y)^3}$$

et symétriquement :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\sin y}{y - x} - 2\frac{\cos y}{(y - x)^2} + 2\frac{\sin y - \sin x}{(y - x)^3}.$$

Au point $(x_\ell, 2\ell\pi - x_\ell)$ on a $\cos x_\ell = \frac{\sin x_\ell}{x_\ell - \ell\pi}$ donc, avec les notations de Monge :

$$r = -\frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)} - \frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)^3} + \frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)^3} = -\frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)}$$

$$t = r$$

$$s = \frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)^3} - \frac{\sin x_\ell}{2(x_\ell - \ell\pi)^3} = 0$$

On a alors :

$$rt - s^2 = \frac{\sin^2 x_\ell}{4(x_\ell - \ell\pi)^2} > 0$$

or $|f(y+v)-f(y)| \leqslant k\,|v| \leqslant k\|H\|$ donc, compte tenu de $|u| = \|H\|$:

$$|u| - |f(y+v)-f(y)| \geqslant \|H\| - k\|H\| = (1-k)\|H\| \geqslant 0$$

ainsi :

$$\|F(X+H)-F(X)\| \geqslant (1-k)\|H\|.$$

> Dans les cas $\|H\| = |v|$ ou $\|H\| = |w|$, on obtient le même résultat en partant de :
> $$|F(X+H)-F(X)| \geqslant |v + f(z+w) - f(z)|$$
> ou de $\quad |F(X+H)-F(x)| \geqslant |w + f(x+u) - f(x)|$.

Puisque $1-k>0$, cette inégalité montre que $H \neq 0 \;\Rightarrow\; F(X+H)-F(X) \neq 0$, donc que F est injective.

À ce niveau de l'étude, puisque F est une injection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est inversible en tout point de $\mathbb{R}^3$, on sait que $F(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur cet ouvert.

- Montrons maintenant que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

> Une possibilité est d'exploiter la connexité de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(F(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F(\mathbb{R}^3)$ convergeant vers V (donc $V \in \overline{F(\mathbb{R}^3)}$).

Puisqu'elle converge, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \|Y_n - Y_p\| = \big\|F(X_n) - F(X_p)\big\| \geqslant (1-k)\,\|X_n - X_p\|$$

montre, avec $1-k>0$, que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy donc convergente ($\mathbb{R}^3$ est complet).

Posons $U = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n$, par continuité de F en U on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} F(X_n) = F(U) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} Y_n = F(U) \quad \text{ou encore} \quad V = F(U).$$

On en déduit $V \in F(\mathbb{R}^3)$, et, par caractérisation séquentielle, $F(\mathbb{R}^3)$ est un fermé.

Finalement, $F(\mathbb{R}^3)$ est non vide, ouvert et fermé. Donc, $\mathbb{R}^3$ étant connexe, on a $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ et F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

Ex. 15

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

On pose $F(x) = f(\|x\|)x$ pour tout x de E.

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa différentielle.

2) Montrer que pour tous x, h de E, $\|F'(x)\cdot h\| \geqslant f(\|x\|)\|h\|$.

3) Montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

1)

> Pour montrer que F est différentiable en x, il suffit d'exhiber une application linéaire $L\ :\ h \mapsto L\cdot h$, $L \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
> $$F(x+h) = F(x) + L\cdot h + o(h).$$
> On remarque d'autre part que la différentielle de F en x est ici notée $F'(x)$.

Ⓕ Équations aux dérivées partielles

Ex. 16

1) Soit $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u - v > 0\}$ et $\Phi \;:\; U \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto (u^2 + v^2, u + v)$.

Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U sur un ouvert V à préciser.

2) Déterminer les applications $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in V,\ 2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - (y^2 - x) = 0 \qquad (E)$$

1) Déterminons $V = \Phi(U)$.

$(x, y) \in V$ si et seulement si il existe $(u, v) \in U$ tel que :

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u + v.$$

Avec $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$, le système précédent équivaut à :

$$u + v = y, \quad 2uv = y^2 - x.$$

Ainsi, on a $(x, y) \in V$ si et seulement si l'équation :

$$T^2 - yT + \frac{y^2 - x}{2} = 0$$

admet deux solutions réelles distinctes donc si et seulement si :

$$y^2 - 4\left(\frac{y^2 - x}{2}\right) > 0 \quad \text{soit aussi} \quad 2x - y^2 > 0 : V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x - y^2 > 0\}.$$

Pour tout $(x, y) \in V$, les couples $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) = \Phi(u, v)$ sont (a, b) et (b, a) où a et b sont les racines distinctes de :

$$T^2 - yT + \frac{y^2 - x}{2} = 0.$$

Un seul de ces deux couples est dans U, donc Φ est injective, et finalement c'est une bijection de U sur V.

Formons la matrice jacobienne de Φ :

$$J\,\Phi\,(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\det J\,\Phi\,(u, v) = 2(u - v) \neq 0 \text{ sur } U.$$

Puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et que son jacobien ne s'annule pas sur U, la bijection Φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U sur V.

> Remarquons que, dans ce cas, on peut exprimer Φ^{-1} ce qui permet de vérifier directement que cette application est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V.

2) Pour $f \in \mathcal{C}^2(V, \mathbb{R})$, on pose $g = f \circ \Phi$ donc :

$$\forall (u, v) \in U,\ g(u, v) = f(u^2 + v^2, u + v).$$

On obtient alors pour tout $(u, v) \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 + v^2, u + v\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 + v^2, u + v\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2v\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 + v^2, u + v\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 + v^2, u + v\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u, v) &= 4uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(u^2 + v^2, u + v\right) + (2u + 2v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(u^2 + v^2, u + v\right) \\ &\qquad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(u^2 + v^2, u + v\right) \\ &= 2\left(y^2 - x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\end{aligned}$$

Donc f est solution de (E) sur V si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(u, v) = 2uv. \tag{1}$$

Puisque U est convexe, il vient :

$$\begin{aligned}(1) &\iff \forall (u, v) \in U,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = uv^2 + \lambda(u), \quad \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ &\iff \forall (u, v) \in U,\ g(u, v) = \frac{u^2v^2}{2} + A(u) + B(v), \quad (A, B) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\end{aligned}$$

et finalement, f est solution de (E) sur V si et seulement si il existe A et B dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (x, y) \in V,\ f(x, y) = \frac{1}{8}\left(y^2 - x\right)^2 + A\left(\frac{y + \sqrt{2x - y^2}}{2}\right) + B\left(\frac{y - \sqrt{2x - y^2}}{2}\right).$$

Ex. 17

Soit $\phi\ :\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v) = \left(x, \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^{*2}$ sur un ouvert à préciser.

2) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^{*2}, \mathbb{R}\right)$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y). \tag{E}$$

1) On commence par rechercher $\operatorname{Im}\phi = \phi\left(\mathbb{R}_+^{*2}\right)$.

$$\begin{cases} u = x \text{ et } \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = v \\ \text{avec } x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases} \quad \text{donne} \quad \begin{cases} x = u \text{ et } y = \dfrac{u}{1 + uv} \\ \text{avec } u > 0 \text{ et } 1 + uv > 0 \end{cases}$$

Réciproquement :

$$\begin{cases} x = u \text{ et } y = \dfrac{u}{1+uv} \\ \text{avec } u > 0 \text{ et } 1+uv > 0 \end{cases} \quad \text{donne} \quad \begin{cases} x = u \text{ et } 1+xv = \dfrac{x}{y} \\ \text{avec } x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} u = x \text{ et } v = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \text{avec } x > 0 \text{ et } y > 0 \end{cases}$$

Ainsi ϕ induit une bijection de $U = \mathbb{R}_+^{*2}$ sur :

$$V = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u > 0, 1 + uv > 0\right\}.$$

V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'image réciproque de $\mathbb{R}_+^{*2}$ par l'application continue :

$$\Psi \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto (u, 1 + uv).$$

D'autre part, les applications :

$$\phi \;:\; (x, y) \mapsto \left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \phi^{-1} \;:\; (u, v) \mapsto \left(u, \frac{u}{1+uv}\right)$$

sont évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement. Ainsi ϕ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

2) Étant donné $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, posons $g = f \circ \phi^{-1}$: on a $g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ avec $f = g \circ \phi$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = g\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

donc, f est solution de (E) sur U si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in U, x^2 \frac{\partial g}{\partial u}\left(x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = f(x, y) \tag{1}$$

c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in V, u^2 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = g(u, v) \tag{2}$$

soit encore :

$$\forall (u, v) \in V, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{u^2} g(u, v) = 0 \tag{3}$$

et enfin :

$$\forall (u, v) \in V, \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{u^2} g(u, v)\right) e^{\frac{1}{u}} = 0. \tag{4}$$

Cette dernière équation s'écrit :

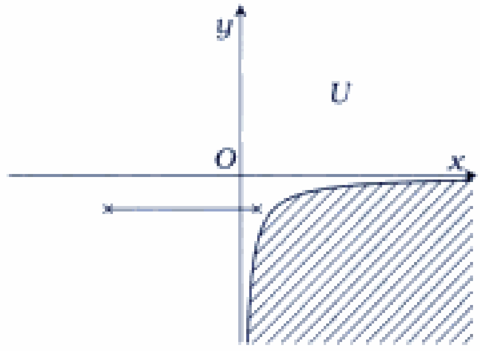
$$\forall (u, v) \in V, \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\frac{1}{u}} g(u, v)\right) = 0. \tag{4}$$

En remarquant que, quels que soient $(u_1\,.\,v)$ et $(u_2\,.\,v)$ éléments de V, le segment $[(u_1\,.\,v),(u_2\,.\,v)]$ est inclus dans V, on obtient que (4) équivaut à l'existence de $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (u,v) \in V,\ e^{\frac{1}{u}} g(u,v) = h(v)$$

soit finalement :

$$\forall (x,y) \in U, f(x,y) = e^{-\frac{1}{x}} h\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$



Ⓖ Intégrales doubles – Intégrales curvilignes

Ex. 18

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Comment aborder cette question ?

Une idée naturelle est de remarquer que si f est solution, alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

ce qui constitue une équation dont on ne sait pas tirer grand'chose !

Cette première piste n'étant pas la bonne, on peut alors se proposer d'étudier le problème analogue relatif aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est solution, elle est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$$

ce qui, avec $f(0) = 0$, donne $f = 0$ (fonction nulle).

Ainsi, on peut avoir idée de montrer que la seule solution du problème est la fonction nulle et, pour ce faire, on opère par majoration.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le pavé $D(x,y) = [0,x] \times [0,y]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ ce qui, avec la continuité de f, assure l'existence de :

$$M(x,y) = \sup_{(u,v)\in D(x,y)} |f(u,v)|.$$

Avec $f(x, y) = \iint_{D(x,y)} f(u, v)\,du\,dv$, on obtient alors :

$$|f(x, y)| \leqslant M(x, y)\,|x|\;|y|.$$

Pour tout $(u, v) \in D(x, y)$, on a $D(u, v) = [0, u] \times [0, v] \subset D(x, y)$ donc $M(u, v) \leqslant M(x, y)$ et :

$$|f(u, v)| \leqslant M(x, y)\,|u|\;|v|$$

$$\text{puis}\quad |f(x, y)| \leqslant M(x, y) \iint_{D(x,y)} |u|\;|v|\,du\,dv = M(x, y)\frac{|x|^2}{2}\,\frac{|y|^2}{2}\,.$$

Étant donné $k \in \mathbb{N}$, en supposant :

$$|f(x, y)| \leqslant M(x, y)\frac{|x|^k}{k!}\,\frac{|y|^k}{k!}$$

on obtient de même :

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leqslant \iint_{D(x,y)} M(u, v)\frac{|u|^k}{k!}\,\frac{|v|^k}{k!}\,du\,dv \\ &\leqslant M(x, y) \iint_{D(x,y)} \frac{|u|^k}{k!}\,\frac{|v|^k}{k!}\,du\,dv \\ &= M(x, y)\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{|y|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

et on a ainsi prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x, y)| \leqslant M(x, y)\frac{|x|^n}{n!}\,\frac{|y|^n}{n!}\,.$$

Étant donné que $\dfrac{|x|^n}{n!}$ et $\dfrac{|y|^n}{n!}$ sont les termes généraux de séries convergentes, ils tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc $f(x, y) = 0$.

Ceci est vrai pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc $f = 0$.

Ex. 19

$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, prouver l'existence et calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left(\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\,d\theta \right) dx.$$

> On a affaire ici à une intégrale double sur un pavé non borné. C'est le moment de revoir dans le cours :
>
> 1) les conditions d'intégrabilité d'une fonction continue sur un tel pavé ;
>
> 2) les conditions d'application du théorème de Fubini.

La fonction $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin\theta)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, donc, l'intervalle d'intégration étant compact, le théorème de continuité sous le signe somme nous donne que la fonction :

$$f\ :\ x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\,d\theta$$

est continue sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$.

On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{-\alpha x} f(x)\right| \leqslant \pi e^{-\alpha x}$, or $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'après l'hypothèse $\alpha > 0$), il en est donc de même pour $x \mapsto e^{-\alpha x} f(x)$. Dans ces conditions, on sait que $F\ :\ (x, \theta) \mapsto e^{-\alpha x} \cos(x \sin\theta)$ est intégrable sur $P = [0, +\infty[\times [0, \pi]$ et on a :

$$I = \iint_P F.$$

De même, on vérifie que $G\ :\ (x,\theta)\mapsto e^{-\alpha x}\sin(x\sin\theta)$ est intégrable sur P. Ainsi, $H = F + i\,G$ est intégrable sur P et on a :

$$I = \operatorname{Re}\iint_P H = \operatorname{Re}\iint_P e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $\theta\in[0,\pi]$, la fonction $x\mapsto e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car :

$$\left|e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\right| = e^{-\alpha x}\ (\text{et } \alpha>0).$$

De plus, la fonction $\theta\mapsto e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}$ est continue sur $[0,\pi]$ et il existe $\varphi\ :\ x\mapsto e^{-\alpha x}$, continue, intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\forall\,\theta\in[0,\pi],\forall x\in\mathbb{R},\ \left|e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\right|\leqslant\varphi(x)$$

donc le théorème de continuité sous le signe somme avec domination globale donne que :

$$g\ :\ \theta\mapsto\int_0^{+\infty}e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}x \text{ est continue sur } [0,\pi].$$

Le théorème de Fubini nous donne alors :

$$\iint_P e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\left(\int_0^{\pi}e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty}e^{x(\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta$$

Donc, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{x(-\alpha+i\sin\theta)}}{-\alpha+i\sin\theta}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-i\sin\theta} = \frac{\alpha+i\sin\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta}$, il vient :

$$I = \int_0^{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
I &= 2\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\alpha^2+\sin^2\theta}\qquad(\text{car}\quad\sin\theta=\sin(\pi-\theta))\\
&= 2\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\dfrac{\alpha^2}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = 2\,\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2\left(1+t^2\right)+t^2}\qquad(t=\tan\theta)\\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{t\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\right]_0^{+\infty}.
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}}\cdot$$

Ex. 20

1) Prouver l'existence de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer I en considérant les intégrales :

$$\iint_{C_a}e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad\text{et}\quad\iint_{D_a}e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où on a posé pour $a\in\mathbb{R}_+^*$, :

$$C_a = [-a,a]\times[-a,a]\quad\text{et}\quad D_a = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\leqslant a^2\right\}.$$

1) La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

L'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc équivalente à celle de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ce qui assure l'intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$.

L'existence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ puis celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ en résulte.

2) Il resulte du 1) que :

$$I = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et cette intégrale se relie facilement à :

$$J_a = \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

cependant, ni l'une ni l'autre ne se calcule au moyen des primitvies usuelles. On peut alors penser à encadrer J_a par des intégrales du type :

$$K_b = \iint_{D_b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pour lesquelles on dispose d'un calcul simple (par les primitives) grâce à un passage en coordonnées polaires.

Avec :

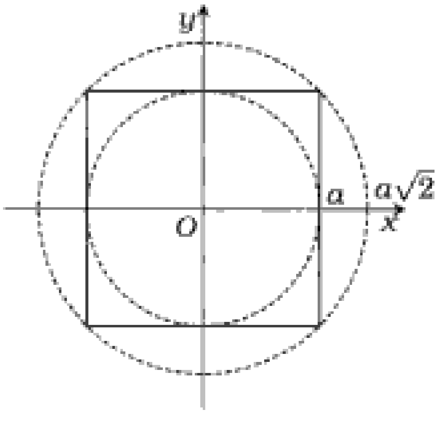
$$e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2},$$

le théorème de Fubini nous donne :

$$J_a = \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

et, puisqu'il s'agit de réels positifs :

$$I_a = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{J_a}.$$



La double inclusion $D_a \subset C_a \subset D_{a\sqrt{2}}$ et la positivité de $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ donnent alors

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{C_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit :

$$K_a \leqslant J_a \leqslant K_{a\sqrt{2}} \quad (\mathrm{i}) \quad \text{où on a posé } K_a = \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Effectuons le changement de variables défini par :

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ 0 \leqslant r \leqslant a,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

il vient :

$$K_a = \iint_{\Delta_a} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{avec} \quad \Delta_a = [0, a] \times [0, 2\pi]$$

donc :

$$K_a = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

L'inégalité (i) devient alors :

$$\pi\left(1 - e^{-a^2}\right) \leqslant J_a \leqslant \pi\left(1 - e^{-2a^2}\right)$$

et on en déduit $\lim\limits_{a\to+\infty} J_a = \pi$, d'où finalement :

$$I = \lim_{a\to+\infty} \sqrt{J_a} = \sqrt{\pi}.$$

Ex. 21

Soit $a > 0$ et $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + 2xy + 2y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$. Calculer :

$$I_a = \iint_{D_a} \left(2x^2 + 5xy + y^2\right)e^{-(x^2+2xy+2y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En écrivant $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$, on constate que la forme quadratique :

$$q \;:\; (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + 2y^2$$

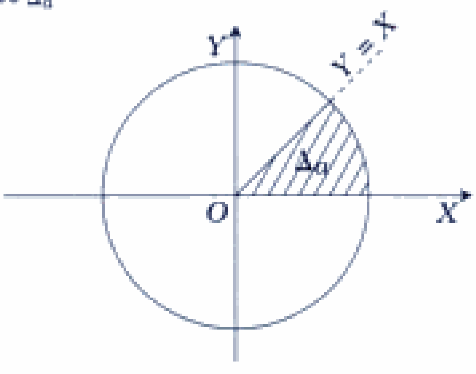
est définie-positive.

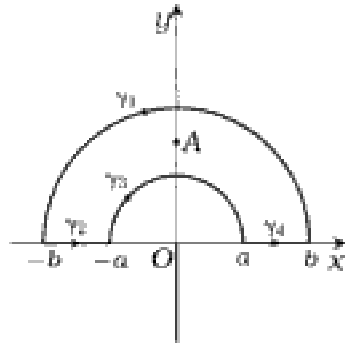
De plus, le changement de variable linéaire défini par $X = x + y$, $Y = y$ induit une bijection de D_a sur :

$$\Delta_a = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; X^2 + Y^2 \leqslant a^2, X - Y \geqslant 0, Y \geqslant 0\right\}.$$

Avec $\dfrac{D(X, Y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et donc $\dfrac{D(x, y)}{D(X, Y)} = 1$, on obtient :

$$I_a = \iint_{\Delta_a} \left(2X^2 + XY - 2Y^2\right)e^{-(X^2+Y^2)}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$





On vérifie d'abord que ω, qui est visiblement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, est fermée sur cet ouvert.

Avec $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, on obtient pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{-y}}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[(-x\sin x + y\cos x - \cos x)\left(x^2+y^2\right) - 2xy\sin x + 2y^2\cos x\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{e^{-y}}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[(-x\sin x + y\cos x + \cos x)\left(x^2+y^2\right) - 2xy\sin x - 2x^2\cos x\right]$$

d'où :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Γ est inclus dans l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\ /\ y \leqslant 0\}$ et il est facile de montrer que V est étoilé par rapport à tout point $A = (0, \lambda)$, avec $\lambda > 0$.

En conséquence, par application du théorème de Poincaré, ω est exacte sur V et $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$.

2) En observant que Γ est la réunion des quatre arcs γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 paramétrés par :

$$\begin{array}{lcll}
\gamma_1 & : & \theta \mapsto (b\cos\theta, b\sin\theta), & \theta \in [0,\pi] \\
\gamma_2 & : & x \mapsto (x,0), & x \in [-b,-a] \\
\gamma_3 & : & \theta \mapsto (a\cos\theta, a\sin\theta), & \theta \in [\pi, 0] \\
\gamma_4 & : & x \mapsto (x,0) \quad , & x \in [a,b]
\end{array}$$

on obtient :

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta + 2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

donc :

$$2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Puis, sachant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est impropre convergente, on obtient :

$$\begin{aligned}
2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}} 2\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to 0}\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta - \lim_{b\to+\infty}\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(i)}
\end{aligned}$$

Une majoration évidente donne :

$$\left|\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

et la concavité de sin sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ fournit sur cet intervalle $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$, donc :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-b\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2b\theta}{\pi}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{b}$$

puis :

$$\left|\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{b} \quad \text{et} \quad \lim_{b\to+\infty}\int_0^\pi e^{-b\sin\theta}\cos(b\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0. \qquad \text{(ii)}$$

En remarquant que la fonction de deux variables :

$$(a,\theta)\mapsto e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)$$

est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, le théorème de continuité sous le signe somme avec un intervalle d'intégration compact donne que :

$$a\mapsto\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\pi e^{-a\sin\theta}\cos(a\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi. \qquad \text{(iii)}$$

En conclusion, les propositions (i), (ii), (iii) donnent :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

H Géométrie différentielle

Ex. 23

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par :

$$x = 3t^2 \quad , \quad y = 2t^3.$$

Quel est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener à $\mathcal{C}$ trois tangentes dont deux sont orthogonales ?

> On forme l'équation «en t» caractérisant les points de $\mathcal{C}$ où la tangente passe par un point $M(x, y)$ donné. Il reste alors à traduire que cette équation possède deux racines réelles telles que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points correspondants soient orthogonales.

La tangente au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$\mathcal{D}_t \; : \; tx - y - t^3 = 0.$$

Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point P de coordonnées (x, y) correspondent aux paramètres t solutions de :

$$t^3 - xt + y = 0.$$

Cette équation a trois solutions lorsque $4x^3 - 27y^2 > 0$ (on reconnaît l'équation de $\mathscr{C}$).

Les tangentes $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$ sont orthogonales si et seulement si :

$$uv + 1 = 0 \quad \text{(produit scalaire de vecteurs directeurs de } \mathscr{D}_u \text{ et } \mathscr{D}_v\text{).}$$

En conséquence, si par le point $P(x, y)$ passent trois tangentes $\mathscr{D}_u, \mathscr{D}_v, \mathscr{D}_w$ à $\mathscr{C}$ dont deux sont orthogonales, on a :

$$t^3 - xt + y = (t-u)(t-v)(t-w) \quad \text{et} \quad uv = -1,$$

d'où on déduit : $w = y$, $u + v = -y$ et $w(u+v) + uv = -x$, puis $y^2 - x - 1$.

Réciproquement, en supposant $y^2 = x - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} t^3 - xt + y &= t^3 - \left(1 + y^2\right)t + y \\ &= (t-y)\left(t^2 + yt - 1\right) \end{aligned}$$

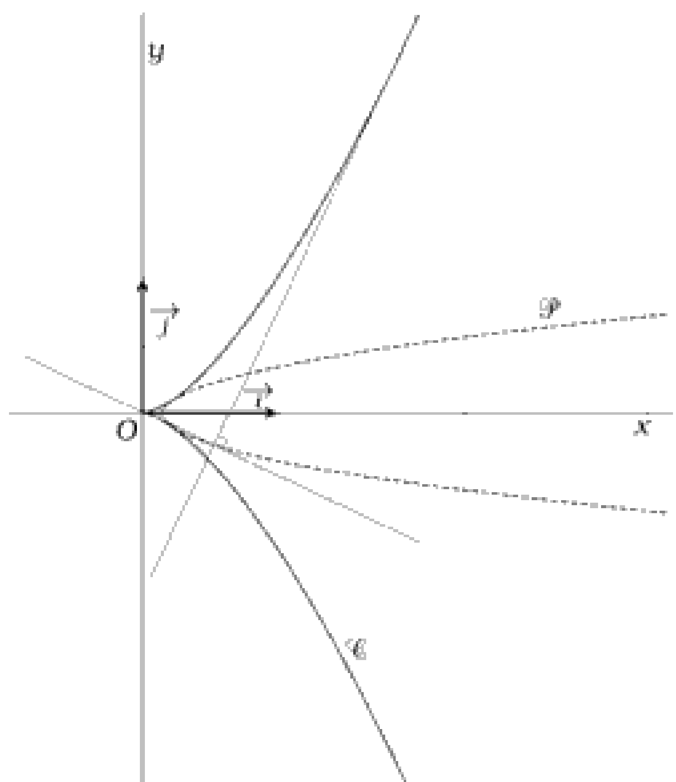
Donc l'équation $t^3 - xt + y = 0$ admet deux racines réelles u et v vérifiant $uv = -1$.

L'ensemble cherché est donc :

$$(E) \ : \ y^2 = x - 1.$$

(E) est une parabole tangente à $\mathscr{C}$ aux points :

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$



On trouve $z_0 \neq 0$ et $z_0^3 - 3z_0^2 + 2z_0 = 0$ c'est-à-dire :

$$z_0 = 1 \quad \text{ou} \quad z_0 = 2.$$

Il y a donc deux solutions au problème posé :

- le plan tangent en $M_1(1, 1, 1)$, qui a pour équation :

$$x + y - 3z + 1 = 0 \,;$$

- le plan tangent en $M_2 = (4, 2, 2)$, qui a pour équation :

$$x + 2y - 6z + 4 = 0.$$

Ex. 27

Former une équation du cône $\mathscr{C}$, de sommet O, circonscrit à la surface Σ d'équation :

$$x^3 - 3xy + z = 0$$

dans un repère $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

> Le cône $\mathscr{C}$ est engendré par les droites passant par O et tangentes à Σ, c'est-à-dire aussi les droites (OM) telles que M décrive l'ensemble des points de Σ en lesquels le plan tangent passe par O. On est donc ramené à chercher les plans tangents à Σ qui contiennent O.

Il convient d'obtenir le contour apparent Γ de la surface Σ vue de O, c'est-à-dire le lieu des points $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de Σ, non singuliers, en lequels le plan tangent Π_0 passe par O.

Équation du plan tangent Π_0 :

$$\left(3x_0^2 - 3y_0\right)x - 3x_0y + z - \left(3x_0^2 - 3y_0\right)x_0 + 3x_0y_0 - z_0 = 0.$$

> On vérifie facilement que M_0 est non singulier sur Σ si et seulement si $M_0 \neq O$.

Équations du contour apparent Γ :

$$x^3 - 3xy + z = 0,\ 3x^3 - 6xy + z = 0,\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{ou} \quad x^3 - 3xy + z = 0,\ x(2x^2 - 3y) = 0,\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Ainsi $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = \Sigma \setminus \{O\} \cap (x = 0)$ et $\Gamma_2 = \Sigma \setminus \{O\} \cap \left(2x^2 - 3y = 0\right)$.

Γ_1 a pour équations $x = 0$, $z = 0$, $y \neq 0$, c'est l'axe Oy privé de O.

Γ_2 peut se paramétrer par $x = t$, $y = \dfrac{2}{3}t^2$, $z = t^3$, $t \neq 0$.

L'axe Oy, c'est-à-dire $\Gamma_1 \cup \{O\}$, est tracé sur Σ, c'est une partie du cône cherché. L'autre partie du cône, notée $\mathscr{C}'$, de courbe directrice Γ_2, peut se paramétrer par :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (\lambda, t) \mapsto x = \lambda t, y = \frac{2}{3}\lambda\, t^2, z = \lambda t^3.$$

En éliminant les paramètres λ et t, une équation cartésienne apparaît :

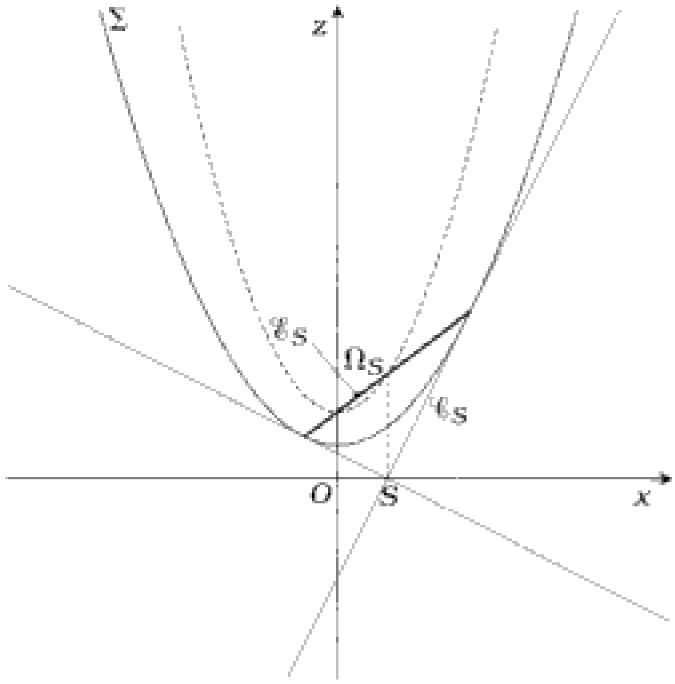
$$\mathscr{C}' \ : 9y^2 - 4xz = 0$$

et on reconnait un cône du second degré.

$\mathscr{E}_S$ se projette orthogonalement sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en le cercle de centre S, d'équation dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 1$$

$\mathscr{E}_S$ est donc une ellipse du plan Π_S dont le centre Ω_S est le point de Π_S se projetant en S. Les coordonnées de Ω_S dans $\mathscr{R}$ sont donc (a, b, c) avec $c = a^2 + b^2 + 1$, et l'ensemble des centres Ω_S des ellipses $\mathscr{E}_S$ est le paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2 + 1$ dans le repère $\mathscr{R}$.



Hidden page

donc la fonction continue y'' est intégrable sur $[a, +\infty[$ par application du critère de domination.

Par suite, l'identité $\forall t \geqslant a, y'(t) = y'(a) + \int_a^t y''(x)\,\mathrm{d}x$ montre qu'il existe $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \ell$.

b) En remplaçant $y(t)$ par $y(t) - \ell t$, on est ramené à démontrer le résultat dans le cas où $\ell = 0$. On a alors $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > a, \forall t \geqslant T, \left|y'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et :

$$|y(t) - y(T)| \leqslant (t - T)\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{avec l'inégalité des accroissements finis.}$$

On en déduit pour $t \geqslant T$:

$$|y(t)| \leqslant |y(T)| + |y(t) - y(T)| \leqslant |y(T)| + (t - T)\frac{\varepsilon}{2}$$

et donc :

$$|j(t)| \leqslant \frac{|y(T)|}{t} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec $\lim_{t \to +\infty} \frac{y(T)}{t} = 0$, on obtient l'existence de $T_1 \geqslant T$ tel que :

$$\forall t \geqslant T_1, \frac{|y(T)|}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_1 > a, \forall t \geqslant T_1, |j(t)| \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion :

$$\lim_{t \to +\infty} j(t) = 0.$$

2 Étude des zéros des solutions de $y'' + f(t)\,y = 0$

Préliminaires – Notations

Toutes les fonctions intervenant dans le problème sont à valeurs réelles.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, on lui associe l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}, f) \quad y'' + f(t)y = 0.$$

On appelle solution de $(\mathcal{E}, f)$ toute fonction u deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad u''(t) + f(t)u(t) = 0.$$

Soit u une solution de $(\mathcal{E}, f)$:

– on dit que a est un zéro de u si $a \in I$ et $u(a) = 0$;

– on dit que (a, b) est un couple de zéros consécutifs de u si a et b sont deux zéros de u, $a < b$, et $\forall t \in]a, b[, u(t) \neq 0$;

– on dit qu'une suite (t_N), indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, est une suite de zéros consécutifs de u si pour tout entier N, (t_N, t_{N+1}) est un couple de zéros consécutifs de u.

Quelles sont toutes les fonctions φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, et solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$?

d) Montrer qu'une telle fonction φ admet dans chaque intervalle $\left[N\pi, N\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $N \in \mathbb{N}^*$, un unique zéro x_N défini par la relation :

$$x_N = \operatorname{Arctan} x_N + N\pi.$$

Donner un développement limité à l'ordre 2 suivant les puissances de $\frac{1}{N}$, de $x_N - N\pi$.

Partie B

Dans cette partie, f est une fonction continue sur un intervalle I telle que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) < 0$$

u désigne une solution de $(\mathcal{E}, f)$ sur I.

1) Montrer que s'il existe a et b, éléments distincts de I tels que $u(a) = u(b) = 0$, u est la solution nulle sur I.

2) On suppose que I est non majoré et $a \in I$.
Montrer que si $u(a) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$, u est la solution nulle sur I.

3) On suppose que $I = \mathbb{R}$.

a) Montrer que si, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) > 0$, u est non majorée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si, $\exists a \in \mathbb{R}$, $u(a) = 0$ et $\forall t \in \left]a, +\infty\right[$, $u(t) > 0$, u est non majorée sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que la seule solution de $(\mathcal{E}, f)$, bornée sur $\mathbb{R}$, est la solution nulle.

d) La conclusion de c) est-elle encore vraie si I est un intervalle $\left[a, +\infty\right[$?

Partie C

1) On suppose que f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) \geqslant g(t).$$

u est une solution de $(\mathcal{E}, g)$ admettant un couple de zéros consécutifs (a, b) dans I.
v est une solution de $(\mathcal{E}, f)$ ne s'annulant pas simultanément en a et b.

a) Montrer que si :

$$\forall t \in \left]a, b\right[, \quad u(t) > 0, \quad v(a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v(b) \geqslant 0$$

alors
$$u'(b)v(b) - u'(a)v(a) < 0$$

b) Montrer que si $\forall t \in [a, b]$, $u(t) \geqslant 0$ et $v(t) \geqslant 0$, la fonction $(u'v - uv')$ est croissante sur $[a, b]$.

c) En déduire que v admet un zéro dans $\left]a, b\right[$.

2) Retrouver le résultat du B.1) à l'aide du résultat du C.1)c).

3) On revient au cas général d'une fonction f quelconque continue sur un intervalle I.

Montrer que si u est une solution de $(\mathcal{E}, f)$ admettant un couple de zéros consécutifs, toute autre solution de $(\mathcal{E}, f)$ non proportionnelle admet un zéro dans $[a, b]$.

4) On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$0 < \lambda^2 \leqslant f(t) \leqslant \mu^2 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Soit u une solution non nulle de $(\mathcal{E}, f)$ sur I.

a) Démontrer que tout intervalle, fermé de longueur $\frac{\pi}{\lambda}$ inclus dans I, contient un zéro de u.

b) Démontrer que si a est un zéro de u, u n'admet aucun autre zéro dans l'intervalle $\left]a - \frac{\pi}{\mu}, a + \frac{\pi}{\mu}\right[$.

5) Pour α réel, soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_\alpha) \qquad y'' + \left(1 + \frac{\alpha}{t^2}\right) y = 0.$$

Dans cette question on suppose de plus $\alpha > 0$. Soit u une solution non nulle de (E_α).

a) Pour tout réel $a > 0$, montrer l'existence d'un plus petit zéro γ de u dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

b) Montrer l'existence d'une suite (t_N), $N \in \mathbb{N}$, de réels strictement positifs telle que :

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$, (t_N, t_{N+1}) est un couple de zéros consécutifs de u ;

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}, 0 < t_{N+1} - t_N \leqslant \pi$;

(iii) $\lim\limits_{N \to +\infty} t_N = +\infty$;

(iv) $\lim\limits_{N \to +\infty} t_{N+1} - t_N = \pi$.

6) On reprend la question précédente dans le cas où $\alpha \leqslant 0$.

a) Montrer l'existence d'un plus petit zéro γ de u dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier les zéros de u en précisant ce que deviennent dans ce cas les résultats du C.5)b).

Solution

Partie A

1) a) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, si $u'(a) = 0$ comme on a déjà $u(a) = 0$, u est la fonction nulle sur I. Donc l'hypothèse $u \neq 0$ donne $u'(a) \neq 0$ et la continuité de u' donne l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $u'(t) > 0$ si $u'(a) > 0$ et $u'(t) < 0$ si $u'(a) < 0$.

Ainsi u est strictement monotone sur $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, ce qui assure que a est le seul zéro de u sur cet intervalle et donc :

$$\forall t \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha] \setminus \{a\}, u(t) \neq 0.$$

b) Soit Z l'ensemble des zéros de u dans I. Supposons Card $Z = +\infty$, alors il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de points deux à deux distincts appartenant à Z, donc aussi à I. L'intervalle I étant borné, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que l'on peut extraire de $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Puisque I est fermé, on a $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)} \in I$ et par continuité de u :

$$u(a) = \lim_{n\to+\infty} u\left(a_{\varphi(n)}\right) = 0.$$

Ainsi a est un zéro de u dans I et pour tout $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_0 \;\Rightarrow\; a_{\varphi(n)} \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha].$$

Les $a_{\varphi(n)}$ étant deux à deux distincts, ceci prouve que Card $Z \cap I \cap [a-\alpha, a+\alpha] = +\infty$ et c'est contradictoire avec le a). On en déduit que Z est fini.

c) Si a est intérieur à I en reprenant le raisonnement du a), il existe $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ avec $\forall t \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $u'(t) > 0$ si $u'(a) > 0$ et $u'(t) < 0$ si $u'(a) < 0$.

Pour $u'(a) > 0$, u est strictement croissante sur $[a-\alpha, a+\alpha]$, donc avec $u(a) = 0$, on obtient $u(t) < 0$ sur $[a-\alpha, a[$ et $u(t) > 0$ sur $]a, a+\alpha]$.

Pour $u'(a) < 0$, u est strictement décroissante sur $[a-\alpha, a+\alpha]$, donc $u(t) > 0$ sur $[a-\alpha, a[$ et $u(t) < 0$ sur $]a, a+\alpha]$.

2) a) C'est une question de cours. Si y est solution, on a :

$$\forall t \in [a, +\infty[,\ y(t) = \int_a^t B(s) \exp\left(\int_s^t A(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s.$$

b) Les hypothèses se lisent maintenant :

$$\varphi \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}),\ \varphi(a) = 0,\ \forall t \in [a, +\infty[,\ \varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + B_1(t)$$

avec B_1 continue sur $[a, +\infty[$ et $B_1 \leqslant B$.

D'après le a), on obtient :

$$\forall t \in [a, +\infty[,\ \varphi(t) = \int_a^b B_1(s) \exp\left(\int_s^t A(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

et avec $B_1(s) \leqslant B(s)$ et $\exp\left(\int_s^t A(u)\,\mathrm{d}u\right) > 0$, il vient :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \varphi(t) \leqslant \int_a^t B(s) \exp\left(\int_s^t A(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s$$

c) Posons $\varphi(t) = \int_a^t w(s)u(s)\,\mathrm{d}s$. Puisque w est positive, on a :

$$\forall t \geqslant a,\ u(t)w(t) \leqslant v(t)w(t) + w(t) \int_a^t w(s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \geqslant a,\ \varphi'(t) \leqslant w(t)\,\varphi(t) + v(t)w(t).$$

Or φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, avec $\varphi(a) = 0$, donc le b) donne :

$$\forall t \geqslant a,\ \varphi(t) \leqslant \int_a^t w(s)v(s) \exp\left(\int_s^t w(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s.$$

et avec $u(t) - v(t) \leqslant \varphi(t)$, il vient finalement :

$$\forall t \geqslant a, \quad u(t) \leqslant v(t) + \int_a^t w(s)v(s) \exp\left(\int_s^t w(u)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}s.$$

Sur l'intervalle $I_N = \left[N\pi, N\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction ξ : $t \mapsto \tan t - t$ est strictement croissante ($\xi'(t) = \tan^2 t$) et on a $\xi(N\pi) = -N\pi$, $\lim\limits_{t \to N\pi + \frac{\pi}{2}} \xi(t) = +\infty$; en tenant compte de l'hypothèse $N > 0$, ξ a donc un zéro et un seul x_N situé sur $\left]N\pi, N\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

- L'équation $\tan t = t$, $t \in \left]N\pi, N\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ est encore équivalente à :

$$\tan(t - N\pi) = t,\ t - N\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{donc à} \quad t - N\pi = \operatorname{Arctan} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi x_N est caractérisé par :

$$x_N = N\pi + \operatorname{Arctan} x_N \tag{i}$$

- $x_N > N\pi$ donne $\lim\limits_{N \to +\infty} x_N = +\infty$ et donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \operatorname{Arctan} x_N = \frac{\pi}{2}$. On en déduit en tenant compte de (i) :

$$x_N = N\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

Alors :

$$\operatorname{Arctan} x_N = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x_N} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{N\pi\left(1 + \frac{1}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left[\frac{1}{N\pi} - \frac{1}{2N^2\pi} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right].$$

d'où :

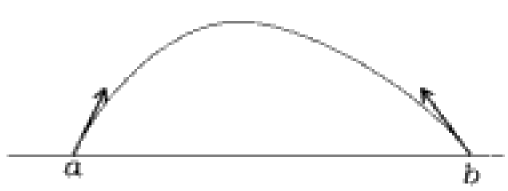
$$x_N = N\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{N\pi} + \frac{1}{2N^2\pi} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Partie B

1) Supposons u non nulle.

D'après le A.1), le nombre de zéros de u sur tout segment s de $\mathbb{R}$ est fini, on peut donc se ramener au cas où a et b sont deux zéros consécutifs de u, $a < b$.

Alors, au besoin en remplaçant u par $-u$, on peut supposer $u(t) > 0$ sur $]a, b[$ et, d'après le A.1)c), on obtient $u'(a) > 0$ et $u'(b) < 0$.



Or la condition $\forall t \in I$, $u''(t) = -f(t)u(t)$ donne $\forall t \in I$, $u''(t) > 0$, u' est donc strictement croissante sur $[a, b]$, et on a $u'(b) > u'(a)$, ce qui est évidemment contradictoire. En conséquence, $u = 0$.

Remarque. On a la même conclusion avec $f(t) \leqslant 0$ sur I.

2) Supposons u non nulle.

D'après le 1) ci-dessus, u n'a alors pas d'autre zéro sur I et, au besoin en remplaçant u par $-u$, on peut supposer :

$$\forall t \in \left]a, +\infty\right[, u(t) > 0.$$

Dans ce cas, on a $u'(a) > 0$, (cf. A.1)c)), et $\forall t \in \left]a, +\infty\right[, u''(t) > 0$ donc $\forall t \in \left]a, +\infty\right[$, $u'(t) > u'(a)$. On en déduit :

$$\forall t \in \left]a, +\infty\right[, u(t) = u(t) - u(a) = \int_a^t u'(\lambda)\mathrm{d}\lambda > (t-a)u'(a) \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$$

C'est contradictoire avec l'hypothèse $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$; en conséquence u est la solution nulle sur I.

3) a) En supposant $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) > 0$ on déduit comme ci-dessus que u' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, u' n'est donc pas constante et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u'(a) \neq 0$.

- pour $u'(a) > 0$, on a $\forall t > a$, $u(t) - u(a) = \displaystyle\int_a^t u'(\lambda)\mathrm{d}\lambda > u'(a)(t-a)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$;
- pour $u'(a) < 0$, on a $\forall t < a$, $u(t) - u(a) = \displaystyle\int_a^t u'(\lambda)\mathrm{d}\lambda > u'(a)(t-a)$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = +\infty$.

Ainsi u est non majorée sur $\mathbb{R}$.

b) $u(a) = 0$ et $u(t) > 0$ sur $\left]a, +\infty\right[$ donne $u'(a) > 0$ et u' strictement croissante sur $\left]a, +\infty\right[$. Alors $\forall t > a$, $u(t) = u(t) - u(a) > (t-a)u'(a)$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$: u est non majorée.

c) Soit u solution de $(\mathcal{E}, f)$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons u non nulle, d'après B.1), u s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$

- si u ne s'annule pas, on a :
  - soit $u(t) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et alors u est non majorée d'après le a) ;
  - soit $u(t) < 0$ sur $\mathbb{R}$ et alors $(-u)(t) > 0$, or $-u$ est solution de $(\mathcal{E}, f)$ donc d'après le a), $-u$ est non majorée ce qui donne u non minorée ;
- si u s'annule en un point a, on a :
  - soit $\forall t > a$, $u(t) > 0$ et d'après le b), u est non majorée ;
  - soit $\forall t > a$, $u(t) < 0$ et d'après le b), $-u$ est non majorée donc u est non minorée.

Dans tous les cas on voit que u est non bornée.

d) Le résultat du c) est faux lorsque $I = \left[a, +\infty\right[$. En effet, $t \mapsto e^{-t}$ est solution bornée sur $\left[0, +\infty\right[$ de $y'' - y = 0$.

Partie C

1) a) $u(a) = 0$ et $u(t) > 0$ sur $\left]a, b\right[$ donne $u'(a) > 0$ et donc $-u'(a)v(a) \leqslant 0$;

$u(b) = 0$ et $u(t) > 0$ sur $\left]a, b\right[$ donne $u'(b) < 0$ et donc $u'(b)v(b) \leqslant 0$.

L'une au moins des inégalités précédentes est stricte car $\big(v(a), v(b)\big) \neq (0, 0)$ donc finalement :

$$u'(b)v(b) - u'(a)v(a) < 0.$$

b) De $u'' = -gu$ et $v'' = -vf$ on tire $\left(u'v - uv'\right)' = u''v - uv'' = (f-g)uv$.

Puisque l'on a $f \geqslant g$ sur I, $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$ sur $\left]a, b\right[$, on obtient $\left(u'v - uv'\right)' \geqslant 0$ sur $\left]a, b\right[$ et donc $u'v - uv'$ est croissante sur $[a, b]$.

c) Au besoin en remplaçant u par $-u$, on peut supposer $u(t) > 0$ sur $\left]a, b\right[$.

Supposons que v ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors :

1^er^ cas. $v(t) > 0$ sur $]a, b[$ donc, par continuité, $v(a) \geqslant 0$, $v(b) \geqslant 0$, et , d'après a) :

$$u'(b)v(b) < u'(a)v(a)$$

que, d'après b), $u'(b)v(b) \geqslant u'(a)v(a)$, ce qui est contradictoire : ce cas est impossible ;

cas. $v(t) < 0$ sur $]a, b[$, on se retrouve dans le premier cas avec $-v$: ce cas est également impossible.

Conclusion : v s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

2) Considérons les équations $(\mathcal{E}, f)\ :\ y'' + fy = 0, f \leqslant 0$ sur I et $(\mathcal{E}, 0)\ :\ y'' = 0$.

Supposons que u solution de $(\mathcal{E}, f)$ s'annule deux fois : en a et b zéros consécutifs, alors la fonction constante $v\ :\ x \mapsto 1$ qui est solution de $(\mathcal{E}, 0)$ s'annulerait sur $]a, b[$; c'est absurde, u admet donc au plus un zéro.

3) Soient u et v solutions non nulles de $(\mathcal{E}, f)$, non proportionnelles : (u, v) est alors une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E}, f)$.

Supposons $v(a) = 0$ (ou $v(b) = 0$), toute solution $\lambda u + \mu v$ de $(\mathcal{E}, f)$ s'annulerait en a (ou en b), c'est contraire au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, donc $v(a) \neq 0$ et $v(b) \neq 0$.

On applique alors le C.1) avec $g = f$: v s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

4) $\forall t \in I, 0 < \lambda^2 \leqslant f(t) \leqslant \mu^2$.

a) Soit $a \in I$ tel que $\left[a, a + \dfrac{\pi}{\lambda}\right] \subset I$, alors :

$$x \mapsto \sin \lambda(x - a)$$

est solution de $y'' + \lambda^2 y = 0$ admettant a et $a + \dfrac{\pi}{\lambda}$ comme couple de zéros consécutifs.

u étant solution de $y'' + fy = 0$ avec $\forall t \in I$, $f(t) > 0$, d'après le B.1) u ne s'annule pas simultanément en a et b.

Alors, avec $\forall t \in I, f(t) \geqslant \lambda^2$, on déduit du C.1) que u s'annule sur $\left[a, a + \dfrac{\pi}{\lambda}\right]$.

b) On suppose $u(a) = 0$.

$v\ :\ x \mapsto \sin \mu(x - a)$ est solution de $y'' + \mu^2 y = 0$; $a - \dfrac{\pi}{\mu}$, a et $a + \dfrac{\pi}{\mu}$ sont des zéros consécutifs de v.

Si u s'annulait en $b \in \left[a - \dfrac{\pi}{\mu}, a + \dfrac{\pi}{\mu}\right] \setminus \{a\}$, d'après C.1), v s'annulerait sur $]a, b[$.

C'est contradictoire, d'où la conclusion.

5) a) On a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 1 + \dfrac{\alpha}{t^2} \geqslant 1$ donc d'après C.4), tout intervalle $[a, a + \pi]$, avec $a > 0$, contient au moins un zéro de u.

D'après A.1) le nombre de zéros de u dans $[a, a + \pi]$ est fini, le plus petit élément γ de cette famille est donc aussi le plus petit élément de la famille des zéros de u dans $[a, +\infty[$.

b) Prenons pour t_0 un zéro quelconque de u sur $[1, +\infty[$.

Sur $[t_0, +\infty[$, on a $1 \leqslant 1 + \dfrac{\alpha}{t^2} \leqslant 1 + \alpha$ donc si t_1 est le zéro consécutif de t_0, à droite de t_0, on a d'après C.4) :

3 Étude d'une équation de Ricatti

On considère l'équation différentielle :

$$y' = x^2 + y^2 \tag{E_1}$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x.

Partie A

1) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il y a unicité au problème de Cauchy relatif à l'équation (E_1) en ce point.

2) Soit φ une solution maximale de (E_1) et I son intervalle ouvert de définition.

a) Montrer que φ est strictement croissante.

b) On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) > 0$. Montrer que, pour $x \geqslant x_0$ et $x \in I$, on a :

$$\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} \geqslant 1.$$

En déduire que l'intervalle I est majoré.

c) Que peut-on dire de I s'il existe $x_1 \in I$ tel que $\varphi(x_1) < 0$?

d) Montrer que I est borné.

e) Déterminer l'image de I par φ.

f) Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?

3) On fixe un réel α ; pour tout β, on note $I(\beta)$ l'intervalle de définition de la solution maximale vérifiant $\varphi(\alpha) = \beta$.
Comparer les bornes des intervalles $I(\beta_1)$ et $I(\beta_2)$ lorsque $\beta_1 \leqslant \beta_2$.

4) On désigne par H l'ensemble des points (u, v) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels il existe une solution φ de (E_1) telle que :

$$\varphi(u) = v \text{ et } \varphi''(u) = 0.$$

Dessiner succinctement H en précisant son asymptote ainsi que les points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

5) On fixe un nombre réel t et on note φ_t la solution maximale s'annulant en t. Déterminer la courbure de φ_t au point $(t, 0)$.

Partie B

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions réelles f, définies sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et satisfaisant à l'équation différentielle :

$$y'' + x^2 y = 0 \tag{E_2}$$

1) Préciser la dimension de $\mathcal{S}$.

2) a) Déterminer les séries entières dont la somme est solution de (E_2). Calculer leur rayon de convergence.

b) En déduire l'expression comme somme d'une série entière des fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{S}$ définies respectivement par :

$$f_1(0) = 1 \text{ et } f_1'(0) = 0 \quad , \quad f_2(0) = 0 \text{ et } f_2'(0) = 1.$$

c) Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. Exprimer f en fonction de f_1, f_2 et des nombres $a = f(0)$, $b = f'(0)$. Étudier, suivant les valeurs de a et b, la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $(0, a)$.

3) Montrer que f_1 est strictement positive sur l'intervalle $[-2, 2]$.
(On pourra commencer par étudier la somme des quatre premiers termes de la série.)

Partie C

On désigne par φ une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle I, par Φ une primitive de φ, et on pose :

$$f(x) = e^{-\Phi(x)} \text{ pour tout } x \in I.$$

1) Quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire φ pour que f soit solution de (E_2) ?

2) On suppose ici que φ est solution maximale de (E_1), et on appelle I son intervalle ouvert de définition.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'une ou l'autre des bornes de I en restant dans I.

b) On suppose φ impaire. Que peut-on dire de I ? Calculer la dérivée $\varphi^{(n)}(0)$ lorsque n n'est pas de la forme $4k+3$.

3) Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ non identiquement nulle.

a) Soit x_0 un zéro de f. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule qu'en x_0.

b) Montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f n'est pas borné ni supérieurement ni inférieurement.

c) Comment varie f entre deux zéros consécutifs ?

Solution

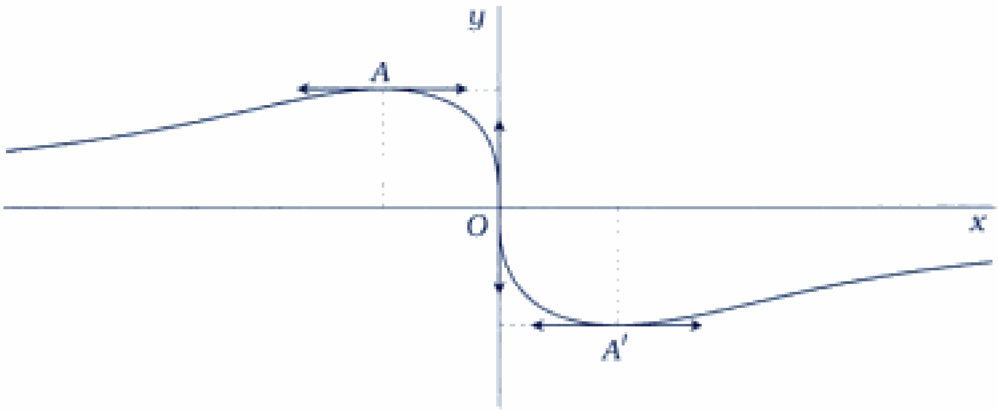
Partie A

1) La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$ donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale (I, φ) de (E_1) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$. L'intervalle I est ouvert.

2) a) φ est strictement croissante. On a en effet :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \varphi'(x) \geqslant x^2 > 0.$$

b) On suppose qu'il existe $x_0 \in I, \varphi(x_0) > 0$.



Tangente parallèle à Oy : en O.

Tangente parallèle à Ox : $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\sin 2\theta}$, $y' = \dfrac{-\sqrt{2}\cos 2\theta}{2\sqrt{-\sin 2\theta}}$ s'annule pour $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, ce qui donne le point :

$$A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Un second point convient, il s'agit de A' symétrique A par rapport à O.

5) La courbe représentative $\mathscr{C}_t$ de φ_t est paramétrée par :

$$x \mapsto \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + \varphi_t(x)\,\overrightarrow{j}\ ,\ x \in I.$$

On a alors $\forall x \in I$:

$$\overrightarrow{M'}(x) = \overrightarrow{i} + \varphi_t'(x)\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} + \left(x^2 + \varphi_t^2(x)\right)\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{M''}(x) = 2\left[x + \varphi_t(x)\left(x^2 + \varphi_t^2(x)\right)\right]\overrightarrow{j},$$

d'où, au point $(t, 0)$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = t\,\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{M'}(t) = \overrightarrow{i} + t^2\,\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{M''}(t) = 2t\,\overrightarrow{j}.$$

La courbe étant orientée dans le sens des x croissants, la courbure en ce point est donnée par :

$$c = \frac{\left[\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}\right]}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3}.$$

On obtient donc :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 2t \end{vmatrix}}{\left(1+t^4\right)^{3/2}} = \frac{2t}{\left(1+t^4\right)^{3/2}}.$$

Partie B

1) Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire permet d'affimer que les solutions de (E_2) sont définies sur $\mathbb{R}$ et que $\dim \mathscr{S} = 2$.

2) a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Si sa somme S est solution de (E_2) sur $]-R, R[$, on a nécessairement :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0 \qquad (1)$$

Hidden page

3) Posons $u_n = a_{4n}x^{4n}$, il vient :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^4}{(4n+4)(4n+3)} \leqslant \frac{16}{8\times 7} \text{ pour } |x| \leqslant 2 \text{ et } n \geqslant 1,$$

donc la série vérifie le critère des séries alternées et :

$$f_1(x) \geqslant 1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \prod_{k=1}^{n} 4k-1}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad f_1(x) \geqslant 1 - \frac{x^4}{4\times 3} + \frac{x^8}{4\times 3\times 8\times 7} - \frac{x^{12}}{4\times 3\times 8\times 7\times 12\times 11}$$

Posons $g(x) = 1 - \dfrac{x^4}{4\times 3} + \dfrac{x^8}{4\times 3\times 8\times 7} - \dfrac{x^{12}}{4\times 3\times 8\times 7\times 12\times 11}$.

$$g'(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{4\times 3\times 7} - \frac{x^{11}}{4\times 3\times 8\times 7\times 11} = -\frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x^4}{4\times 3\times 7} + \frac{x^8}{4\times 3\times 8\times 7\times 11}\right)$$

$$h(x) = 1 - \frac{x^4}{4\times 3\times 7} + \frac{x^8}{4\times 3\times 8\times 7\times 11} = 1 - \frac{x^4}{4\times 3\times 7}\left(1 - \frac{x^4}{8\times 11}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^4}{8\times 11} \in \left[0, \dfrac{16}{8\times 11}\right] \to 0 < 1 - \dfrac{x^4}{8\times 11} < 1 \\[2ex] \dfrac{x^4}{4\times 3\times 7} \in \left[0, \dfrac{16}{4\times 3\times 7}\right] \to 0 < \dfrac{x^4}{4\times 3\times 7} < 1 \end{array}\right\} \frac{x^4}{4\times 3\times 7}\left(1 - \frac{x^4}{8\times 11}\right) \in \left]0,1\right[$$

donc $h(x) > 0$, donc $g'(x) < 0$ pour $x \in [0,2]$: g est décroissante sur $[0,2]$.

D'autre part, g est *paire*, ainsi $g(x) \geqslant g(2)$ pour $x \in [-2,2]$

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 - \frac{2^4}{4\times 3} + \frac{2^8}{4\times 3\times 8\times 7} - \frac{2^{12}}{4\times 3\times 8\times 7\times 12\times 11} \\ &= 1 - \frac{4}{3} + \frac{8}{3\times 7} - \frac{32}{3\times 7\times 3\times 11} \\ &= 1 - \frac{20}{3\times 7} - \frac{32}{3^2\times 7\times 11} \\ &= 1 - \frac{32 + 3\times 20\times 11}{3^2\times 7\times 11} \\ &= 1 - \frac{692}{693} > 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in [-2,2]$, $g(x) \geqslant \dfrac{1}{693}$ ce qui assure $f_1(x) > 0$.

Partie C

1) $f = e^{-\Phi}, f' = -\varphi\, e^{-\Phi}, f'' = \left(-\varphi' + \varphi^2\right)e^{-\Phi}$ donc :

$$f''(x) + x^2 f(x) = 0 \iff -\varphi'(x) + \varphi^2(x) + x^2 = 0 \iff \varphi'(x) = x^2 + \varphi^2(x).$$

Ainsi f est solution de (E_2) si et seulement si φ est solution de (E_1).

2) a) ▪ D'après A.1), on a $I = \left]a, b\right[$ avec a et b finis, $\varphi(I) = \mathbb{R}$, et φ est strictement croissante.

▪ Les solutions maximales de l'équation linéaire (E_2) sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f solution de (E_2) sur I est prolongeable en une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Notons g ce prolongement. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$g(b) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} e^{-\Phi(x)}, \quad g'(b) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} -\varphi(x)e^{-\Phi(x)}$$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} \varphi(x) = +\infty$ donc l'existence de :

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in I}} \varphi(x)e^{-\Phi(x)} \quad \text{exige que} \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x\in I}} e^{-\Phi(x)} = 0$$

donc $g(b) = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in I}} f(x) = 0.$$

De même en considérant $g(a)$ et $g'(a)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} \varphi(x) = -\infty$, on obtient :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}} f(x) = 0.$$

b) I est ouvert et symétrique par rapport à 0.

$0 \in I$ donc on peut prendre Φ tel que $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donne :

$$f(0) = e^{-\Phi(0)} = 1 \quad \text{donc} \quad f = f_1.$$

Alors $\varphi(x) = -\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}$.

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-1}}{2^{2n-2}(n-1)!\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-1)} \quad , \quad f_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n} n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-1)}.$$

Tout développement limité de $\varphi(x)$ ne contient que des termes de la forme x^{4n-1} donc, pour tout $n \in \left\{4k+3 \,/\, k \in \mathbb{N}\right\}$ on a $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

3) a) $f'(x_0) \neq 0$ sinon par unicité au problème de Cauchy, $f = 0$. Donc f est strictement monotone au voisinage de x_0.

b) Supposons que $f^{-1}(\{0\})$ soit majoré, alors puisque $f^{-1}(\{0\})$ est un ensemble de points isolés, $f^{-1}(\{0\})$ admettrait un plus grand d'élément x_0.

Sur $\left]x_0, +\infty\right[$, on a $f > 0$ ou $f < 0$.

Au besoin en remplaçant f par $-f$, sur $\left]x_0, +\infty\right[$, on peut supposer $f > 0$, alors avec $\Phi(x) = -\ln f(x)$, on a :

$$f(x) = e^{-\Phi(x)}$$

Solution

1) Soit $M \in \mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) dans R.

$$MF^2 = (x-\lambda)^2 + y^2 \quad , \quad MF'^2 = (x+\lambda)^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma_c) &\iff \left((x-\lambda)^2 + y^2\right)\left((x+\lambda)^2 + y^2\right) = 4\,\lambda^2\,c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda^2 - 2x\,\lambda\right)\left(x^2 + y^2 + \lambda^2 + 2x\,\lambda\right) = 4\,\lambda^2\,c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda^2\right) - 4x^2\lambda^2 = 4\,\lambda^2\,c^2 \\
&\iff \left(x^2 + y^2 + \lambda)^2\right)^2 = 4\,\lambda^2\left(x^2 + c^2\right) \text{ est une équation cartésienne de } (\Gamma_c)
\end{aligned}$$

2) a) Soit (ρ, θ) un couple de coordonnées polaires d'un point M de $\mathscr{E}$, alors :

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma_c) &\iff \left(\rho^2 + \lambda^2\right)^2 - 4\,\lambda^2\,\rho^2\cos^2\theta = 4\,\lambda^2\,c^2 \\
&\iff \rho^4 + 2\,\rho^2\,\lambda^2\left(1 - 2\cos^2\theta\right) + \lambda^4 - 4\,\lambda^2\,c^2 = 0 \\
&\iff \rho^4 + 2\,\rho^2\,\lambda^2\cos 2\,\theta + \lambda^4 - 4\,\lambda^2\,c^2 = 0 \\
&\iff \begin{cases} X = \rho^2 \\ X^2 - 2\,\lambda^2\,(\cos 2\theta)X + \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Étudions l'équation du second degré :

$$X^2 - 2\,\lambda^2\,(\cos 2\theta)X + \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right) = 0. \qquad (*)$$

Le discriminant réduit est :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \lambda^4\cos^2 2\,\theta - \lambda^4 + 4\,\lambda^2\,c^2 \\
&= \lambda^2\left(4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\,\theta\right)
\end{aligned}$$

Comme le discrimant dépend de θ, pour étudier l'existence et le signe de cette équation, nous allons associer à l'étude du signe de Δ', le signe du terme constant (qui est ici le produit des racines) :

$$P = \lambda^2\left(\lambda^2 - 4c^2\right).$$

- 1^er^ cas : $0 < \lambda < 2c \iff P < 0$

Donc $\Delta' > 0$ et $(*)$ admet deux racines X_1 et X_2, non nulles, de signe contraire :

$$X_1 = \lambda^2\cos 2\,\theta + \lambda\,\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2\theta}$$

$$X_2 = \lambda^2\cos 2\,\theta - \lambda\,\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}$$

$X_2 < X_1$, donc $X_1 > 0$, $X_2 < 0$, et :

$$\rho^2 = \lambda^2\cos\theta 2\,\theta + \lambda\,\sqrt{4c^2 - \lambda^2\sin^2 2\theta}.$$

- 2^e^ cas : $\lambda = 2c \iff P = 0$

Et $\Delta' = 4c^2\,\lambda^2\cos^2 2\theta = \lambda^4\cos^2 2\theta$; $(*)$ admet deux racines, l'une est nulle, l'autre est positive si et seulement si $\cos 2\,\theta \geqslant 0$, et alors :

$$\rho^2 = 2\,\lambda^2\cos 2\theta.$$

- 3ᵉ cas : $\lambda > 2c \iff P > 0$

Si $(*)$ admet des racines, alors elles sont de même signe ; or $(*)$ admet des racines si et seulement si $\Delta' \geqslant 0$, donc $(*)$ admet des racines si et seulement si :

$$|\sin 2\theta| \leqslant \frac{2c}{\lambda}.$$

> Bien sûr : $\lambda > 2c \iff \dfrac{2c}{\lambda} < 1$.

Le signe (commun) de ces racines est alors donné par le signe de leur somme :

$$S = 2\lambda^2 \cos 2\theta$$

et donc est positif si et seulement si $\cos 2\theta \geqslant 0$ et, dans ce cas, on a :

$$\rho_1^2 = \lambda^2 \cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}$$

$$\rho_2^2 = \lambda^2 \cos 2\theta - \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}$$

b) - $\lambda \leqslant 2c$

Posons :

$$g(\theta) = \sqrt{\lambda^2 \cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}$$

alors $\rho = \pm g(\theta$ et $(\Gamma_c) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_1 (resp. Γ_2) est la courbe dont une équation polaire est :

$$\rho = g(\theta) \qquad (\text{resp. } \rho = -g(\theta)).$$

Comparons Γ_1 et Γ_2.

Soit $M \in \Gamma_1$ de coordonnées polaires $(\theta, g(\theta))$, ce même point M admet aussi pour coordonnées polaires $(\theta + \pi, -g(\theta))$.

Or la fonction g est périodique de période π :

$$g(\theta) = g(\theta + \pi).$$

Ainsi le point M de Γ_1, de coordonnées polaires $(\theta, g(\theta))$, admet aussi pour coordonnées polaires $(\theta + \pi, -g(\theta + \pi))$, donc M est un point de Γ_2 et ceci pour tout $M \in \Gamma_1$, donc $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$; de façon analogue, $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$ et (Γ_c) admet pour équation polaire :

$$\rho = g(\theta) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \rho = \sqrt{\lambda^2 \cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}.$$

> *Remarque.* D'après a), si $\lambda < 2c$, g est définie sur $\mathbb{R}$; si $\lambda = 2c$, g est définie si et seulement si $\cos 2\theta \geqslant 0$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, sauf en les points où $\cos 2\theta$ s'annule (cas où $\lambda = 2c$).

- $\lambda > 2c$

À nouveau, posons :

$$g(\theta) = \sqrt{\lambda^2 \cos 2\theta + \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}$$

$$\text{et} \quad h(\theta) = \sqrt{\lambda^2 \cos X\theta - \lambda\sqrt{4c^2 - \lambda^2 \sin^2 2\theta}}$$

dans le cas où $\cos 2\theta \geqslant 0$ et $|\sin 2\theta| \leqslant \dfrac{2c}{\lambda}$.

Par un raisonnement analogue au précédent, on montre alors que (Γ_c) est la réunion de Γ_1 et Γ_2 où Γ_1 et Γ_2 admettent pour équation polaire :

$$\Gamma_1 : \rho = g(\theta) \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : \rho = h(\theta).$$

Ce sont deux arcs de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Déterminons les points de (Γ_c) où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{\imath}$, puis ceux où la tangente est dirigée par $\vec{\jmath}$. Soit :

$$F(x,y) = \left(x^2+y^2+\lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2+c^2\right).$$

F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et (Γ_c) a pour équation cartésienne $F(x,y)=0$. En les points $M(x,y)$ de Γ_c où le vecteur de coordonnées :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

n'est pas nul, il dirige la normale à la tangente (c'est-à-dire la normale à Γ_c).

Étudions les points M de Γ en lequels $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2+y^2-\lambda^2\right) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 4y\left(x^2+y^2+\lambda^2\right)$$

$$\begin{cases} 4x\left(x^2+y^2+\lambda^2\right)=0 \\ 4y\left(x^2+y^2+\lambda^2\right)=0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+\lambda^2=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2-\lambda^2= \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \end{cases}\right)$$

Or les points $F(\lambda,0)$ et $F'(-\lambda,0)$ ne sont pas des points de (Γ_c), donc il y a au plus un points de (Γ_c) en lequel la normale n'est pas dirigée par le vecteur :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2+y^2-\lambda^2\right) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 4y\left(x^2+y^2+\lambda^2\right)$$

C'est le point $O(0,0)$; or ce point est un point de (Γ_c) si et seulement si $\lambda = 2c$ et alors, en ce point, il y a deux tangentes dont les équations polaires sont :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

or elles ne sont donc pas dirigées par $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$. Ainsi

(i) la tangente en un point est dirigée par le vecteur $\vec{\imath}$ si et seulement si :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0\ ;$$

on est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x^2+y^2+\lambda^2\right)^2 - 4\lambda^2\left(x^2+c^2\right)=0 \\ 4x\left(x^2+y^2-\lambda^2\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\begin{cases} y^2=\lambda(2c-\lambda) \\ x=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x^2=\lambda^2-c^2 \\ x^2+y^2=\lambda^2 \end{cases}\right)$$

d'où la discussion :

– si $\lambda \leqslant c$, il y a deux points en lesquels la tangente est dirigée par $\vec{\imath}$. Ce sont les points de coordonnées :

$$\left(0, -\sqrt{\lambda(2c-\lambda)}\right) \quad , \quad \left(0, +\sqrt{\lambda(2c-\lambda)}\right)\ ;$$

Alors $h = f \circ g$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et elle est bornée inférieurement donc, d'après le 1), il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} h'(u_n) = 0.$$

Or :

$$h'(u_n) = df_{g(u_n)}\Big(g'(u_n)\Big) = \Big\langle \operatorname{grad} f\Big(g(u_n)\Big) \,\Big|\, g'(u_n)\Big\rangle$$

$$\text{et} \quad g'(u_n) = \frac{\operatorname{grad} f\Big(g(u_n)\Big)}{\Big\|\operatorname{grad} f\Big(g(u_n)\Big)\Big\|}$$

donc :

$$h'(u_n) = \Big\|\operatorname{grad} f\Big(g(u_n)\Big)\Big\|.$$

Ainsi, en posant $x_n = g(u_n)$, on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^k$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{grad} f(x_n) = 0.$$

(D) Extremums

Ex. 13

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{si } x \neq y,\ \phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

1) Montrer que :

$$\phi(x, y) = \int_0^1 f'\big((1-t)x + ty\big)\,dt.$$

En déduire que ϕ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer :

$$J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q\,dt.$$

En déduire la valeur des dérivées partielles de ϕ sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

3) On suppose ici $f(x) = \sin x$. Tracer l'ensemble (E) d'équation $\phi(x, y) = 0$. Déterminer les extrémums de ϕ.

1) Pour $x \neq y$, on a :

$$\int_0^1 f'\big((1-t)x + ty\big)\,dt = \left[\frac{f\big((1-t)x + ty\big)}{y - x}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \phi(x, y).$$

En corollaire du théorème de dérivation sous le signe somme, puisque l'intervalle d'intégration est compact, le fait que la fonction :

$$(x, y, t) \mapsto f'\big((1-t)x + ty\big)$$

soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ donne que :

$$\Phi \;:\; (x,y) \mapsto \int_0^1 f'\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a ainsi prolongé ϕ en une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

> Pour tout pavé compact $[a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, les fonctions :
>
> $$(x,y,t) \mapsto (1-t)f''\big((1-t)x+ty\big) \quad \text{et} \quad (x,y,t) \mapsto t\,f''\big((1-t)x+ty\big)$$
>
> sont dominées par des constantes pour $(x,y,t) \in [a,b] \times [c,d] \times [0,1]$, ce qui permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, avec domination locale, et ainsi obtenir l'existence de :
>
> $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$
>
> Les mêmes dominations locales donnent ensuite la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de ces deux dérivées partielles, donc la classe $\mathcal{C}^1$ de Φ.
>
> On termine par récurrence : en supposant Φ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^2$, le même raisonnement montre que chaque dérivée d'ordre n est de classe $\mathcal{C}^1$ donc que Φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Toutes les dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe somme :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; \frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p\,\partial y^q}(x,y) = \int_0^1 (1-t)^p t^q f^{(p+q+1)}\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t.$$

2) Une intégration par parties donne pour $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q\,\mathrm{d}t = \left[(1-t)^p \frac{t^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q+1}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{q+1} J_{p-1,q+1}$$

d'où :

$$J_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)\cdots(q+p)} J_{0,p+q}$$

et, avec $J_{0,p+q} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$, il vient :

$$J_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p\,\partial y^q}(x,x) = f^{(p+q+1)}(x) J_{p,q} = f^{(p+q+1)}(x)\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

3) Pour tout (x,y), on a :

$$\Phi(x,y) = \int_0^1 \cos\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t \quad \text{et, si } x \neq y,\ \Phi(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}.$$

Pour $x \neq y$, $\Phi(x,y) = 0$ équivaut à $\sin x = \sin y$ donc à $y = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, ou $y = \pi - x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Pour $x = y$, $\Phi(x,x) = 0$ s'écrit :

$$\int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \cos x = 0$$

ce qui correspond à $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Titres disponibles en deuxième année dans la filière MP...

En Mathématiques
Analyse MP
Algèbre et géométrie MP

En Physique
Optique MP-PC-PSI-PT
Mécanique MP-PC
Électromagnétisme MP
Électronique MP
Thermodynamique MP

En Chimie
Chimie MP-PT

Livres d'exercices
Mathématiques MP
Physique MP

LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour s'entraîner efficacement et progresser tout au long de l'année.

→ **Des exercices variés,** classés par thème et de difficulté progressive, couvrent la totalité du programme.

→ **Des solutions entièrement rédigées** détaillent l'ensemble des méthodes et des raisonnements à connaître en première année.

→ **De nombreux commentaires** enrichissent les corrigés d'astuces, de conseils et d'explications supplémentaires.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 208.0335 - ISBN : 2 7495 0391 4
www.editions-breal.fr

9 782749 503912